

2014年11月17日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 5

お知らせ

- 講義日程変更しました（日程は変わりませんが、内容を少々変更します）。
- 提出物の締め切りを、講義の翌日の15時に変更します。

前回の補足

- 「常螺旋」と黒板に書いたものを「常螺旋」ではないかというコメントを複数いただきました。調べてみますと、
 - 広辞苑：「螺旋：(1) 螺の殻の線のように巡回した筋。(2) 螺子(ねじ)に同じ」「螺旋：[数] (helix) 円柱面上をまわりながら軸方向に一定の速度で進んで行く時にできる渦巻状の空間曲線。つまき線」
 - 数学辞典(岩波書店)：ordinary helix を「常螺旋」、平面曲線、たとえばアルキメデスの渦巻線を「アルキメデス螺旋」としています。この2つは別の中項目にあり、辞典全体として統一した使い方をしていないようです。ということですので、とちらも使われているようです。山田は「曲線」を表すときは「螺旋」を使うようにしています。

前回までの訂正

- 黒板に書いた「線型常微分方程式の基本定理」に書き間違いがあったそうです：

$$\frac{dx_j}{dt} = x_1\omega_{1j} + \cdots + x_n\omega_{nj}$$

の最後が x_{nj} になっていたそうです。

授業に関する御意見

- 板書を書く速さをもう少しゆっくりにしてほしいです。 山田のコメント：Sorry. 加減がわかりにくいので、その場で指摘していただけると助かります。
- 前回の積み残しの分をもう少し早く進めてほしく思いました。 山田のコメント：了解。
- もう少し時間をかけてゆっくり講義をしてくれるとうれしいです。スピードが速くて、消化不良のまあ次に進んでしまう様な感じがします。 山田のコメント：消化はあとです、という方針もあります。
- このままでいいので、これ以上難しくしないで下さい。 山田のコメント：あなたの難しいがどれくらいかわかりませんが、こんな感じ。
- 問題難しいです...ねむいです。 山田のコメント：はい。
- 講義の翌日に寝坊すると紙が提出できないので、提出期限を延ばして欲しいです。 山田のコメント：15:00でどうですか？
- 特になし。 山田のコメント：me, too.

質問と回答

質問： 授業中に集合とは「なんかの集まり」とおっしゃいましたが、集合の数学的に厳密な定義は何ですか？ 手元の本には「ある特定の性質をそなえたものの集まり」といっていますが、これで大丈夫なんでしょうか。

お答え： たいいてい場合は大丈夫です。「数学的に厳密な定義」は実は大問題でありまして、集合論の公理ができあがるまでに長い歴史があったわけです。ただ、この授業で扱うような状況ではご質問のような理解で十分です（「素朴集合論 naive set theory」の範囲で理解できる）。その範囲で、「集合」の重要な性質は、対象 x がその集合の「要素である」か「要素でない」かがはっきりとしている、ということです。

質問： 前回のクロソイド曲線 ($\kappa(s) = s$) は $(1, 1)$, $(-1, -1)$ に収束するように見えたのですが、そうですか？ どうやればそれを示すことができますか？

お答え： 実は $\pm(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$ に収束します。 $\sqrt{\pi}/2 \div 0.886$ ですから、1 に近いですね。実際、

$$\int_0^{\infty} \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

となります。この積分は、複素解析におけるコーシーの積分公式を用いて、ガウス積分に帰着させて求めることができます。

質問： 曲率が一定な曲線が円になるのは直観的にも十分想像できるのですが、それを示す方法がわかりませんでした。ヒントなどいただけませんか？

お答え： 正の（負の）定数 a に対して、半径 $1/|a|$ の反時計回り（時計回り）の円の曲率は a であることは直接計算でわかる。一方、曲率がこの値 a となる曲線は、回転と平行移動をのぞいてただ一つである（平面曲線の基本定理の一意性の部分）。したがって、曲率 a の曲線は半径 $1/|a|$ の円である。

質問： 撓率の定義にマイナスをつけるのは「昔からそうだから」と言っていました、マイナスをつけないとなにか美しくない結果がでるのでしょうか。例えば今回の問題 4-5 の例でしょうか。また、マイナスをつけるかつかないか先生はどちら派ですか。

お答え： 前半：真上からみて正の向きに回ってる常螺線（つまき線）は、撓率が正のときに、上に向かっていているようにした。後半：私共の本を見ればどちらかわかる。

質問： 撓率は e と n によって表せる平面から曲線がどの程度離れるのかを表す量というようなことが教科書にありましたが、離れる方向や程度というのはどういった感じになるのでしょうか。

お答え： 今回、ブーケの公式を道具に説明してみます。

質問： 空間曲線において、接ベクトルと主法線ベクトルによって平面が定まり、撓率はその平面（の法線）が変化していく方向を示していると考えて良いですか。空間上の 1 点で曲線は“ほぼ平面曲線”で、近くに別の点をとると平面は少し変化する。その平面の法線のかわり具合ということですか。

お答え： その「平面の法線」が従法線 b 、フルネ-セレの公式から $|b'| = |\tau|$ なので、従法線の変化の速さが撓率といつてよいようです。 「変化していく方向」は指し示していないと思いますが。

質問： 撓率が平面曲線からの離れ具合を示しているというお話の中で、 τ に n が入ってくる理由を教えてください。

お答え： 「 τ に n が入る」という言葉がどういうことを指しているのかわかりません。

質問： 曲線の滑らかな変形とはどのような操作ですか？

お答え： テキスト 26 ページのような変形。

質問： 少し前の授業についてになってしまうのですが、陰関数表示を考えたときに、至るところで特異点となるような関数はあるとしたら定数関数になるのでしょうか。

お答え： 至るところ $F_x = 0, F_y = 0$ となる 2 変数関数 $F(x, y)$ にはどんなものがあるでしょう。（定義域が連結なら定数関数に限ることが示せます。微積分の練習問題です。）

質問： 平面曲線について、閉曲線における回転数と自己交叉している点の個数の間に関係はありますか。また、回転数を用いて S^1 の基本群が \mathbb{Z} と同型であることを示すことができるのでしょうか。さらに \mathbb{R}^3 内の閉曲線にも回転数に対応するものはありますか。

お答え： (1) テキスト 33 ページ、定理 3.4 (2) S^1 はひとつの単純閉曲線なので、この基本群を扱うのに「さまざまな曲線の回転数」は直接は使えないと思います。(3) 直接はありません。空間曲線のガウス写像は球面上の曲線となるので、それが動く道のりは任意の正の実数値になってしまいます。

質問： クロソイドをパソコンのグラフ作成ソフトで作ってしようと思い $\frac{d\gamma}{ds} = (\cos(\frac{1}{2}s^2), \sin(\frac{1}{2}s^2))$ $\gamma(0) = (0, 0)$, $s = 0, \dots, 10000$ としたら, 渦が 6, 7 個もある曲線ができてしまいました. これはパソコンがおかしいのでしょうか?

お答え： パソコンではなく, プログラムがおかしいと思われます. どういうソフトウェアにどうやって指示をだしたのか, その結果, 何がでたのか (6, 7 個では曖昧ですね) をお知らせいただければ推測以上のことはできません.

質問： 4 次元以上の曲線についても, 曲率, 捩率 + (次元 - 3) 個の ~ 率を考えられると思います. この場合も Frenet-Serret の公式のような $F' = F\Omega$ が成り立つと思うのですが, このとき Ω はどういう形をしているのでしょうか? (略) と推測できますが.

お答え： \mathbb{R}^n ($n \geq 4$) 内の曲線ということですね (4 次元以上の曲線, ということ, 曲線は 1 次元では? というつつこみが入りそう). おっしゃるとおり, 弧長によりパラメータづけられた曲線から, $(n-1)$ -個の関数 $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{n-1}$ を次のように定義することができます (ただし, 以下の過程で $\kappa_j \neq 0$ ($j = 1, \dots, n-2$) となることを仮定します. 空間曲線の $\kappa \neq 0$ という設定と同じ): $\gamma(s)$ を, 弧長でパラメータづけられた \mathbb{R}^n の曲線とする.

- $e_1(s) := \gamma'(s)$ とすると, $e_1(s)$ は単位ベクトル (に値をとる関数).
- $|e_1| = 1$ なので e_1' は e_1 と直交する. そこで $\kappa_1(s) := |e_1'(s)| (\geq 0)$ とおき, $e_1' \neq 0$ という仮定のもと, $e_2 := e_1'/\kappa_1$ とすれば $\{e_1, e_2\}$ は正規直交系をなし, $e_1' = \kappa_1 e_2$ が成り立つ.
- $|e_2| = 1$ から e_2' は e_2 に直交する. また $e_2' \cdot e_1 = (e_2 \cdot e_1)' - e_2 \cdot e_1' = -e_2 \cdot (\kappa_1 e_2) = -\kappa_1$. したがって, $e_2' + \kappa_1 e_1$ は e_1, e_2 に直交する. $\kappa_2 := |e_2' + \kappa_1 e_1|$ とおき, これが 0 でないという仮定のもと, $e_3 := (e_2' + \kappa_1 e_1)/\kappa_2$ とすると, $\{e_1, e_2, e_3\}$ は正規直交系をなし,

$$e_2' = -\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_3$$

となる.

- e_3' は e_3 に直交する. また $e_3' \cdot e_1 = -e_3 \cdot e_1' = -e_3 \cdot (\kappa_1 e_2) = 0$ なので e_3' は e_1, e_3 の両方に直交し,

$$e_3' \cdot e_2 = -e_3 \cdot e_2' = -e_3 \cdot (-\kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_3) = -\kappa_2$$

なので,

$$\kappa_3 := |e_3' + \kappa_2 e_2|, \quad e_4 := (e_3' + \kappa_2 e_2)/\kappa_3$$

とおけば, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ は正規直交系をなす.

- 以下, 同様にして κ_j, e_{j+1} ($j = 1, \dots, n-2$) を $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$ が正規直交系をなし,

$$e_j' = -\kappa_{j-1} e_{j-1} + \kappa_j e_{j+1} \quad (j = 2, \dots, n-2)$$

を満たすように構成できる.

- 単位ベクトル e_n で e_1, \dots, e_{n-1} に直交し, $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ となるものが唯一存在する. これに対して,

$$\kappa_{n-1} := -e_n' \cdot e_{n-1}$$

と定めると,

$$e_n' = -\kappa_{n-1} e_{n-1}$$

となる.

これによりフレーム $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ をとってやれば, Ω の形が決まります.

ここで, 各 κ_k を「第 k 曲率」とよぶのが普通のようなので. たとえば $n = 3$ のときは τ が第 2 曲率となるわけですね.

質問： 捩率の上手いイメージが湧きません.

お答え： そうですか (で, 質問は?)

質問： 全曲率を計算すると $2\pi\mathbb{Z}$ に入って, それを 2π で割ると回転数になるというのが理解できなかったです. お答え： そうですか (で, 質問は?)

質問： 回転数を頭の中で考える方法として, 反時計回りの円を 1 として... (以下図がたくさん描いてあるが略), あとは連続的に変形です.

お答え： 文が完結していませんが (「方法として... 変形です」では何を聞いているか, 主張しているかわかりません), 描いてある図は正しいと思います.

質問： 特にありません. お答え： me, too.

5 曲線論の補足

- 平面・空間曲線の基本定理の証明と常微分方程式の基本定理
- 陰関数表示された曲線の曲率
- 平面曲線の曲率の幾何学的な意味
 - プーケの公式
 - 曲率円
- 空間曲線の曲率・捩率の幾何学的な意味
 - プーケの公式
 - 接触平面, 展直平面, 法平面への射影
- さまざまな曲線
 - サイクロイド
 - 追跡線

問題

- 5-1 正の整数 m を用いて極座標表示された曲線 $r = \cos m\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を図示し, それと同じ長さをもつ楕円を求めなさい.
- 5-2 陰関数 $F(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ で与えられる曲線 C を考える.
- (1) C 上の全ての点は, 陰関数表示 F の特異点ではないことを確かめなさい.
 - (2) C の曲率の絶対値が最大・最小となる点とそこでの曲率の絶対値を求めなさい.
 - (3) 曲率の符号はどのように定めればよいか.
- 5-3 弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が 0 でないとする. このとき, 3 点 $\gamma(s_0) = P$, $\gamma(s_0 + t) = Q_t$, $\gamma(s_0 - t) = R_t$ を通る円 C_t は $t \rightarrow 0$ とすると s_0 における γ の曲率円になることを示しなさい.
- 5-4 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率, 捩率が

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \quad \tau(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする.

- ある一定な単位ベクトル v で $\gamma'(s)$ と v のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい.
- この v に対して, $\gamma(s)$ の v の直交補空間への正射影 $\gamma^*(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot v)v$ はどんな曲線か.