2014 年 11 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 7

お知らせ

- 次回，12 月 1 日は都合により休講にさせていただきます．
- 12 月 15 日に中間試験を行います．今回予告をいたします．

授業に関する御意見

- 提出問題は楽ではありませんが，この欄（質問，誤りの指摘を含む）がけっこうしんどいです．何とかして埋めて 3 点欲しいですが，ネタが毎回不足します．廃止希望です．空いたスペースに「書」を書きます．
  山田のコメント： あなたが対応できないから「廃止希望」ってどんだけ自己中なの？ と思いますが．ネタ探しを頑張ってもらうことが狙いの一つです．
- 特にありません/特になし　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： $\boxed{2}$ (黒板に書いたものか) の一意性の証明に際して，$\mathcal{F}(s) = (\boldsymbol{e}(s), \boldsymbol{n}(s), \boldsymbol{b}(s))$ の $\boldsymbol{b}$ と $\gamma_2 = A\gamma_1 + \boldsymbol{b}$ の $\boldsymbol{b}$ が競合していたような気がするのですが，気のせいでしょうか．　**お答え：**たしかにまずいですね．

質問： 陰関数表示されている曲線の曲率を考えるときに，曲線を書いてみなくても曲率の符号をうまい具合に定めることはできるのでしょうか．　**お答え：**うまい具合の意味がよくわかりませんが，陰関数表示が特異点をもたず，曲線が連結であれば，矛盾なくふたとおりに決められます．

質問： $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ は円，$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^4 + y^4 = 1\}$ はすこしつぶれた丸い図形ですが，$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^n + y^n = 1\}$ で $n \to \infty$ とすると，その図形は正方形に近づくでしょうか．

お答え： そのままではだめ．n が奇数のとき，図形は閉曲線になりません．$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x|^n + |y|^n = 1\}$ とすると閉曲線が得られます．この集合上の点 (x,y) は $|x| \leqq 1$, $|y| \leqq 1$ を満たしています．ここで $|r| \leqq 1$ のとき $n \to \infty$ としたときの $|r|^n$ の極限はなんでしょう．

質問： 少し前の内容に関してですが，$\boldsymbol{e}(s) = \bigl(\cos\theta(s), \sin\theta(s)\bigr)$ のとき $\kappa = \frac{d\theta}{ds}$ と書けました．では捩率も同様に，何かの変化率であることを表すような式はあるのでしょうか（あるとしたらその何かとは）.

お答え： 空間曲線の曲率についても同じ質問が成立しませんか？ 弧長パラメータのもと，$\kappa = |\boldsymbol{e}'|$, $|\tau| = |\boldsymbol{b}'|$ なので，たとえば $|\tau|$ は接触平面（$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{n}$ ではられる平面）の単位法線ベクトル $\boldsymbol{b}$ が単位球面上を走る速さですね．

質問： 回転や平行移動で移ることを同値とした時の，平面あるいは空間内の曲線全体の成す集合の商集合は，集合論的にはどのような濃度か考えたのですが，$\mathbb{R}$ のべき集合と同じ濃度ですか．

お答え： 曲線は何で決まりますか (曲線論の基本定理)．そのデータ全体の濃度はなにか，ということから自明ですよね．

質問： 曲線があって，ある点での $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}$ の方向を x 軸，y 軸として曲線を $y = f(x)$ と表わすとき，$f(0) = 0$, $f'(0) = 0$ はよいのですが，$f''(0) = \kappa(0)$ が分かりません．

お答え： 曲線を $\gamma(t) = (t, f(t))$ とパラメータ表示して，曲率の表示式（テキスト (2.7) 式）を用いる．

質問： $\mathbb{R}^2$ 内の曲線を特徴づける量は曲率，$\mathbb{R}^3$ 内の曲線を特徴づける量は曲率と捩率の 2 つですが，一般に $\mathbb{R}^n$ $(n \geqq 2)$ 内の曲線を特徴づける量の個数は $n-1$ 個になりますか．　**お答え：**講義資料 5, 3 ページ, 2 つめの質問と回答．

質問： 先生が授業でつかっていた, 空間上の曲線等を描くソフトの名前を教えて下さい．　**お答え：**講義資料 3, 1 ページ

質問： すみません，聞き逃しました．ブーケの定理はテイラーの定理による近似ですか．　**お答え：**そうです．

質問： ブーケの公式ってネーミングが面白いと思いました．　**お答え：**人の名前だからしようがない．教科書 51 ページ．

質問： ブーケの公式のブーケとはどんな人か教えて下さい．　**お答え：**直接の知り合いではないので，ちょっと. . . 教科

書 51 ページに名前をあげていますので，検索してみてください．

質問： 楕円の周長は，長軸，短軸の長さを用いた初等関数で一般に表せますか． **お答え：**いいえ．「楕円積分」で検索．

質問： 今週の問題は過去問と同じですが，重要だからですか? **お答え：**誰も選択しなかった不人気問題だったから．

質問： 日程変更前の 2/2 にやる予定であった「進んだ話題」は授業内では全くやっていただけないということでしょうか．それとも，どこかで別の形でしていただけるのでしょうか．

お答え： まだわかりません．色々なところで少しずつ，という感じでいきたい．

質問： 数学辞典で先生のオススメはありますか．

お答え： 何を求めているか，情報が何もないので「岩波数学辞典ではだめですか」．

質問： 微分方程式のおすすめの参考書などあったらおしえてください．

お答え： 現時点であなたが何を求めていて，何を持っている（予備知識）かという情報が全くありませんので，適切な回答はできません．教科書の参考文献にあがっている本はいかがでしょう．あるいは柳田・栄の本（朝倉書店）など．検索してみてください．

質問： 先生が授業で言っていた「中華思想」というのは先生独自の言葉ですか？ **お答え：**辞書にのっているのでは?

質問： 「章」を表す記号 § の上手な書き方を教えていただけませんか．

お答え： 節 section では？ S を 2 つ書けばいいですね．

質問： 特にありません． **お答え：**me, too.

7 曲面

■曲面のパラメータ表示 （テキスト §6）

2 変数関数のグラフ/ 陰関数表示とパラメータ表示/パラメータ変換/ 単位法線ベクトル/面積

■第一基本形式 （テキスト §7）

問題

7-1 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への滑らかな写像 $p(u,v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v)$ について，

(1) p_u と p_v が一次従属であるような $\mathbb{R}^2$ の点 (u,v) の集合を求めなさい．

(2) $p(a_1) = p(a_2)$ $(a_1 \neq a_2)$ となる $\mathbb{R}^2$ の点の組 (a_1, a_2) をすべて求めなさい．

(3) 滑らかな写像 $\nu\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ で，$|\nu| = 1$, $\mathbb{R}^2$ の各点で p_u と p_v 両方に直交するものを求めなさい．

7-2 単位球面のふたつのパラメータ表示

$$p(u,v) = \bigl(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u\bigr), \qquad \tilde{p}(\xi,\eta) = \left(\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2}, \frac{\xi^2+\eta^2-1}{1+\xi^2+\eta^2}\right)$$

（定義域は適当に考えよ）の間の座標変換を与えなさい．

7-3 陰関数表示 $F(x,y,z) = 0$ で表示された滑らかな曲面上の点 (x_0, y_0, z_0) における単位法線ベクトルは

$$\pm \left.\frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|}\right|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} \qquad \operatorname{grad} F = (F_x, F_y, F_z)$$

であることを示しなさい．

7-4 平面上の長さ $\mathcal{L}$ の閉曲線 $\gamma(s)$ （s は弧長）の重心とは，

$$\frac{1}{\mathcal{L}} \int_0^{\mathcal{L}} \gamma(s)\, ds$$

で与えられる平面上の点である．

xz 平面の上半平面 $\{(x,z) \,|\, z > 0\}$ 上の閉曲線 $\gamma(s)$ を x 軸の回りに回転して得られる曲面の面積は，γ の重心が回転した道のりと γ の長さの積である．このことを示しなさい．

7-5 助変数表示された曲面 $p(u,v) = \bigl(u, v, u^2 - v^2\bigr)$ と (u,v) 平面上の曲線 $\gamma_\theta(t) = t(\cos\theta, \sin\theta)$ $\quad t \in [0,1]$ に対して，$p \circ \gamma_\theta$ は，曲面上の曲線となる．θ が $-\pi$ から π まで変化するときの，この曲線の長さの最大値，最小値を求めなさい．

7-6 2 変数関数の「全微分」とは何か．さらに，それが座標によらない，ということはどういうことか．

7-7 パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ に対して，$\hat{p}(u,v) = Rp(u,v) + \boldsymbol{b}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$) とおくと，

$$R\frac{p_u \times p_v}{|p_u \times p_v|} = \pm\left(\frac{\hat{p}_u \times \hat{p}_v}{|\hat{p}_u \times \hat{p}_v|}\right)$$

であることを示しなさい．ただし $\pm$ の符号は R の行列式の符号である．

7-8 パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ の第一基本量を E, F, G とするとき，

2014 年 11 月 26 日

- $EG-F^2=|p_u\times p_v|^2>0$ である．
- uv 平面上の曲線 $\gamma(t)=\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(a\leqq t\leqq b)$ に対して, 空間曲線 $\tilde\gamma(t)=p\circ\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の時刻 t における速度ベクトルは
$$\frac{d\tilde\gamma}{dt}(t)=p_u\bigl(u(t),v(t)\bigr)\frac{du}{dt}+p_v\bigl(u(t),v(t)\bigr)\frac{dv}{dt}$$
となる．さらに曲線 $\tilde\gamma$ の長さは
$$\int_a^b\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2+2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt}+G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$
であたえられる．ただし $E=E\bigl(u(t),v(t)\bigr)\dots$ である．
- $P=p(u_0,v_0)$ における接ベクトル空間 S_P の 2 つのベクトル
$$\boldsymbol{a}=a_1p_u+a_2p_v,\qquad \boldsymbol{b}=b_1p_u+b_2p_v,$$
の内積は
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2)\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$$
である．
- $\hat p(u,v)=Rp(u,v)+\boldsymbol{b}$ (R は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$) とすると $\hat p$ と p の第一基本行列は一致する．
- $\tilde p(\xi,\eta)$ を $p(u,v)$ からパラメータ変換 $(u,v)\mapsto(\xi,\eta)$ によって得られる曲面，$\tilde p$ の第一基本量を $\widetilde E$, $\widetilde F$, $\widetilde G$ とすると，
$$\begin{pmatrix}\widetilde E&\widetilde F\\\widetilde F&\widetilde G\end{pmatrix}={}^tJ\begin{pmatrix}E&F\\F&G\end{pmatrix}J\qquad\left(J=\begin{pmatrix}u_\xi&u_\eta\\v_\xi&v_\eta\end{pmatrix}\right).$$
- 第一基本形式
$$ds^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$
はパラメータのとりかたによらない．

7-9 曲面 $p(u,v)$ のパラメータ (u,v) が等温座標系であるとは，第一基本量が $E=G$, $F=0$ を満たすことである．このとき，さらにこのパラメータ表示から向きを保つパラメータ変換で得られる同じ曲面のパラメータ表示 $\tilde p(\xi,\eta)$ で (ξ,η) が等温座標系であるための必要十分条件は
$$u+iv\longmapsto\xi+i\eta$$
が（複素関数論の意味で）正則関数となることである．