2014 年 12 月 8 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 8

お知らせ

- 次回，12 月 15 日に中間試験を行います．前回出席されなかった方は，講義 web ページ，OCW より中間試験予告をダウンロードして，内容を確認しておいてください．
- 今回は提出物の受付はいたしません．

前回までの訂正

- 前回の講義資料の番号が間違っていました．「講義資料 7」は「講義資料 6」です．が，今後の混乱を避けるため，web ページ，OCW に上がっている資料の番号は変更しません．「第 6 回」は欠番ということにします．
- 講義で $p(u,v)=(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u)$ に対して $p_u\times p_v=(\cos u)p(u,v)$ と書いたそうです．ただしくは $p_u\times p_v=-(\cos u)p(u,v)$．

授業に関する御意見

- パラメータのとり方によらない，第一基本形式を与えると，ただひとつの曲面が決まるということについて，具体的な例で計算法を教えてほしいです． **山田のコメント：** 第一基本形式から曲面は決まりません．言ってないことを聞き取らないで．
- よくわかっていないことがわかってきました． **山田のコメント：** それは重要なことです．
- 特にないです/特にありません/特になし． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 曲面には標準的なパラメータが存在しないということはどうしてわかるのですか?

お答え： 「標準的なパラメータ」の定義がないのでなんとも言えませんが，例えば，曲線の弧長のように，第一基本形式が du^2+dv^2 の形で表されるようなパラメータは一般に存在しません．このことは数回あとで示します．

質問： 球面が 1 つのパラメータで表示できないということの説明として「$\mathbb{R}^2$ のどんな領域とも同相でない」という事実を挙げていましたが，あまり本質的でないと思います．なぜなら，曲面（自己交叉はないとする）のパラメータ表示の条件に，定義域と曲面がそれぞれ $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ の相対位相によって同相であることを要請していないからです．さらに $\mathbb{R}^2$ で正則なパラメータ表示がなされている曲面でも $\mathbb{R}^2$ と同相でない例が構成できることが考えられます (例えば上の図（山田注：略))．

お答え： そうですね．球面が $\mathbb{R}^3$ の相対位相によりコンパクトであることに注意しておく必要があるようですね（コンパクト性がどう効いてくるのでしょう)．

質問： 滑らかな曲面であれば，それを助変数表示することは可能なのでしょうか?

お答え： 滑らかな曲面をきちんと定義していませんよね．たとえば，平面曲線の場合と同様に，各点の近傍で，なめらかな 2 変数関数のグラフと合同，ということを定義にするならば，グラフ表示できるので局所的には助変数表示可能です．

質問： 7-1 (2) で求めた答は，swallowtail の交叉点なんでしょうか．

お答え： そうです．自己交点・自己交叉などと呼びます．

質問： 外微分という言葉の “外” は何由来なのでしょうか? 同様に，内積，外積の “内”，“外” の由来も気になります．

お答え： “外微分形式” の微分（一般に外微分という）の特別な場合なので教科書では「外微分」という言葉を使いまし

た．関数の微分（全微分）なので，そのように呼んでもよいと思います．内積・外積の本来の語源は不勉強につき知りません．

質問： 単位球面の経緯度による表示の話が，$u=\pm\frac{\pi}{2}$ のとき「v はパラメータとして役に立たない」ことは $p_v=\mathbf{0}$ になることを確かめた方が分かりやすかったと思います．

お答え： 何に比べて分かりやすかったというのでしょう．

質問： 今回の問題の「7-4」の重心の定義に関して，弧長パラメータの s と ds の s は一致するのでしょうか？ そうすると「～ で与えられる平面上の点である」という意味がわからないです．この定義は正しいのでしょうか？ 正しくないのであれば訂正していただきたいです．

お答え： 正しいので訂正しません．前半（でょうか？ まで）と中頃（わからないです，まで）の間の論理関係がわかりませんが，弧長だとどうして，点であるというのがわからないのでしょう．$\gamma(s)$ は弧長 s によってパラメータづけられた平面曲線ですから，$\mathbb{R}^2$ に値をもつ関数です．これを 0 から $\mathcal{L}$ まで（定まった区間）で積分しているのですから，2 つの数の組（ベクトル）がでてきます．これを位置ベクトルとする点のことを言っています．

質問： 第一基本量を $\widehat{I}$ と “^” をつけて書くのは何か理由があるのでしょうか．

お答え： ご質問の記号は第一基本量ではなく「第一基本行列」ですね．第二基本形式 II に対して，第二基本行列を $\widehat{II}$ と書く（たぶん今回やります）のに合わせています．ただし，これはそれほど一般的な記号ではありません．

質問： 黒板に（マルで囲んで）area と書いてありましたが，この意味を教えて下さい． **お答え：**面積．

質問： 今回の授業で，幾何学って解析学っぽい所があるのかなと思いました．

お答え： 幾何学は，代数学や解析学のユーザーでもあります．

質問： 長方形の正確な地図があり，どこがどのように繋がるかが与えられている場合，この地図から面面（原文ママ）を求めるにはどのようにすればいいでしょうか？

お答え： ご質問の意味が正確にとれません．「地図」は何を指していますか？

質問： 「若いほど数学の習得能力がいい」とよく言われますが，これは事実なんでしょうか．

お答え： さあ，個人差の方が大きいと思いますが．

質問： この質問欄に “特になし” と書く人が居ますが，そのような無意味な質問でも点数は得られるのでしょうか？ 他，特になし． **お答え：**0 点．

質問： 特にないです． **お答え：**me, too.

8 第二基本形式

第二基本形式・ワインガルテン行列・主曲率・ガウス曲率・平均曲率，ワインガルテンの公式

問題

8-1 パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを ν とするとき，

$$\widehat{III}=\begin{pmatrix}\nu_u\cdot\nu_u & \nu_u\cdot\nu_v\\ \nu_v\cdot\nu_u & \nu_v\cdot\nu_v\end{pmatrix}$$

を第三基本行列，その各成分を第三基本量という．次を示しなさい：

- $\det\widehat{III}=K^2(EG-F^2)$．ただし K はガウス曲率，E, F, G は第一基本量である．
- $\widehat{III}-2H\widehat{II}+K\widehat{I}=O$．ただし H は平均曲率，$\widehat{I}$, $\widehat{II}$ はそれぞれ第一基本行列，第二基本行列である．

8-2 テキスト 80 ページ問題 3

8-3 テキスト 80 ページ問題 4 の一葉双曲面

8-4 テキスト 80 ページ問題 7

2014 年 12 月 8 日