2015 年 1 月 5 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 10

お知らせ

- あけましておめでとうございます．新しい年が皆様にとって素晴らしいものになりますように．
- 中間試験の答案は，数学事務室にて返却しております．受け取っていない方は，本館 3 階 332B までおいでください．
- 定期試験の予告および持ち込み用紙は，中間試験の答案に添付しています．添付された用紙以外の持ち込みは一切認めません．

10　主方向・漸近方向

1 曲面上の曲線 $\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ のパラメータ s が弧長であるための条件は

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2=1$$

が成り立つことである．ただし E, F, G は p の第一基本量で，$(u,v)=\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

2 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ $(\gamma(0)=\mathrm{P}=p(u_0,v_0))$ の P における速度ベクトルは

$$\gamma'(0)=u'(0)p_u(u_0,v_0)+v'(0)p_v(u_0,v_0)$$

である．

3 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\gamma(s)=p\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ $(\gamma(0)=\mathrm{P})$ の P における法曲率は

$$\kappa_n=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

である．ただし L, M, N は p の第二基本量で，$(u,v)=\bigl(u(s),v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

4 一般に弧長とは限らないパラメータで表された曲線 $\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ $(\gamma(0)=\mathrm{P})$ の P における法曲率は

$$\kappa_n=\frac{L(\dot u)^2+2M\dot u\dot v+N(\dot v)^2}{E(\dot u)^2+2F\dot u\dot v+G(\dot v)^2}$$

である．

5 P を通る曲面上の曲線の P における法曲率は，曲線の P における速度ベクトルの方向のみによって決まる．

$$\kappa_n(\boldsymbol{v})=\mathrm{P}\ \text{で速度}\ \boldsymbol{v}\ \text{をもつ曲線の P における法曲率}$$

2015 年 1 月 5 日

6 $\kappa_n(-\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v})$.

7 $\boldsymbol{v}$ が P における曲面の零でない接ベクトル全体を動くとき，κ_n は最大値，最小値をとり，その値は P における曲面の主曲率と一致する．$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が主曲率と一致するとき $\boldsymbol{v}$ （の方向）を主方向という．

8 曲面 p の P における零でない接ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，点 P を通り，P における曲面の単位法線ベクトル $\nu(\mathrm{P}) = \nu(u_0, v_0)$ と $\boldsymbol{v}$ に平行な平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ をとり，この平面と曲面の交線を，P における速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるような $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線 σ とみなす．このとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は σ の P における（平面曲線としての）曲率と一致する．ただし，$\{\boldsymbol{v}, \nu\}$ が $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の正の基底になるように $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の向きを定めておく．

9 点 P における曲面のガウス曲率 $K(\mathrm{P})$ が負ならば，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる方向 $\boldsymbol{v}$ が（$\boldsymbol{v}$ と $-\boldsymbol{v}$ は同一視することにすれば）ちょうど 2 つ存在する（漸近方向）．

10 点 P におけるガウス曲率が負であるとき，曲面の接平面と曲面との共通部分（と P の十分小さい近傍の共通部分）は P で交わる 2 つの曲線となる．これらの曲線の P における接ベクトルは漸近方向をあたえる．

11 P におけるガウス曲率が負であるとき，ふたつの漸近方向は，主方向で 2 等分される．

問題

10-1 $S = \{(x,y,z) \,|\, x^6 + y^6 + z^6 - 1 = 0\}$ は滑らかな曲面であることを示し，S 上の点 (a,b,c) におけるガウス曲率を (a,b,c) で表せ．（ヒント：$P = (a,b,c) \in S$ が $c \neq 0$ を満たすならば P の近傍で S は $z = f(x,y)$ とグラフ表示される（陰関数定理）．f の形を具体的に求めなくても陰関数の微分公式から f の微分を求めることができるので曲率を計算することができる．$c = 0$ のところではどうすればよいか）

10-2 ガウス曲率が -1 であるような回転面をすべて求め，その絵を描きなさい．（テキスト 79 ページ参照．擬球面が全てではない）

10-3 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ の各点 $\gamma(t)$ が臍点でなく，その点における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が主方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\big(u(t), v(t)\big)$）を曲率線という．$\gamma(t)$ が曲率線であるとき，

$$q(t,s) := p\big(u(t), v(t)\big) + s\nu\big(u(t), v(t)\big)$$

であたえられる曲面のガウス曲率を求めなさい．ただし $\nu(u,v)$ は曲面 p の単位法線ベクトル場である．

10-4 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ において u 曲線，v 曲線が曲率線であるとき，(u,v) を曲率線座標という．曲率線座標のもとでは第一基本行列と第二基本行列が共に対角行列であることを示しなさい．

10-5 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t) = p\big(u(t), v(t)\big)$ の各点 $\gamma(t)$ における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が漸近方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\big(u(t), v(t)\big)$）を漸近曲線という．とくに u 曲線，v 曲線が漸近曲線であるとき，(u,v) を漸近線座標とよぶ．漸近線座標のもとで，第二基本量は $L = 0$, $N = 0$, $M \neq 0$ （したがって，漸近線座標が存在すれば自動的にガウス曲率は負）となることを示しなさい．

10-6 一葉双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ の曲率線座標と漸近線座標を求めなさい．