2015 年 1 月 15 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 11

お知らせ

- 中間試験の答案は，数学事務室にて絶賛返却中．定期試験の持ち込み用紙が綴じこまれています．
- 授業評価へのご協力お願いいたします．
- 今回は提出物の受付を中止させていただきます．

授業に関する御意見

- 希望は提出問題をやさしくしてほしいことです．どれも今回むずかしく，配布プリントの図を写してお茶をにごしました．ごめんなさい．本当にムリです．あと 10-3 の問題文で曲率線を定義したあと，10-4 にも曲率線のことを出すなら，曲率線の定義を別にしてほしいです．

  山田のコメント： 前半：10-1 は単純な計算問題では? 後半：一応，順序が逆ではないのでこれでもよいですよね．
- グラフの絵を講義中にもっと見たいです． **山田のコメント：** いくつかリンクを紹介しましたよね．
- 明けましておめでとうございます．あと一ヶ月と少しではありますが，今年も宜しくお願いします．
- 明けましておめでとうございます．今年もよろしくお願いいたします．

  山田のコメント： こちらこそ．

質問と回答

質問： 曲面上の曲線の長さというのは，空間曲線の長さの式をあれこれいじっていれば出てきますか? 第一基本形式の $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ といった書き方が何なのか今ようやくわかったかんじがします．

お答え： 空間曲線 $\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ の長さの式そのものです．

質問： リーマン計量の定義は何なのですか?

お答え： 詳しくは「多様体論」の授業でコメントされるはず．多様体の各点の接空間に内積を与える「もの」．2 次元多様体であれば，局所座標系 (u, v) で $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ $(EG - F^2 > 0,\ E,\ G > 0)$ というかたちに表される「もの」．

質問： 第一基本形式は Riemann 計量と別称があると仰っていましたが，Riemann 計量は第一基本形式をどのように一般化して得られるのですか．また，第二基本形式の一般化は存在しますか．

お答え： 前半は前の質問と回答参照．後半：一般にリーマン多様体の部分多様体には第二基本形式が定義されます．

質問： 主方向とは A の 2 つの固有ベクトルの方向のことで合っていますか．板書された "固有方向" との違いも教えて下さい．

お答え： 後半：同じ意味．前半：行列 A の固有値 λ（主曲率）に関する固有ベクトルを ${}^t(a, b)$ としたとき，$ap_u + bp_v$ を λ に関する主方向といいます．（忘れていなければ）ガウス写像の微分写像の固有値との関連を説明します．

質問： 主方向は，主曲率を λ_1, λ_2 とすると，$\lambda_1 p_u + \lambda_2 p_v$ と $\lambda_2 p_u + \lambda_1 p_v$ だと思うんですが，図形的にどういう意味を持ちますか．

お答え： 違うんです．これだとパラメータを変換したときに方向が変わってしまいます．上の質問と回答を参照．

質問： A の固有ベクトルが直交するのはどのようなときなのでしょう．$\lambda_1 \neq \lambda_2$ であればよいのでしょうか．

お答え： $\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき，これらの主曲率に対応する主方向は直交します．

質問： 漸近曲線は漸近線と深い関係がありそうだということはなんとなくわかりますが，具体的にはよくわかりません．詳しく教えて下さい．

お答え： 講義で少し述べますが，ガウス曲率が負であるような点で，接平面による曲面の切り口は漸近方向に接します．

質問： Gauss 曲率が局所的な凸性に関わっているということは今回の講義で納得できましたが，平均曲率の幾何学的意味はどういったものになるのでしょうか? Gauss 曲率が同じで平均曲率が異なる例というのはどこかで挙げられていると思いますが例えばどういったものがあるでしょうか.

お答え： 前半：たとえば石鹸膜（平均曲率が 0 になる）やシャボン玉（平均曲率が 0 でない一定値となる）を講義で挙げましたね．後半：例えば平面と円柱.

質問： 扱う空間が n 次元だと，$K=\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i$, $H=\frac{1}{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}\lambda_i$ となるんですか．そして K と H の意味は次元を拡張してもおなじなんですか?

お答え： $\mathbb{R}^n$ の $(n-1)$ 次元部分多様体（超曲面）では第一基本形式，第二基本形式，ワインガルテン行列 A が $\mathbb{R}^3$ の曲面と同様に定義されます．とくに A は $(n-1)$ 次正方行列で，その固有値はパラメータのとり方によらないので，その積，平均は意味をもち，それぞれ "ガウス・クロネッカー曲率"，"平均曲率" とよばれます．ワインガルテン行列の固有値は $(n-1)$ 個ありますから，これらだけでは情報が少なすぎますね．ちなみに，$n \geqq 4$ のとき K は内的な量ではありません.

質問： 曲率線座標と漸近線座標はどのように役立つのですか?

お答え： 曲率線座標については講義で少しコメントした．実は，特殊な状況（たとえば，ガウス曲率一定など）では，曲面論の基本方程式が簡単な形になります.

質問： 曲面を局所的にグラフ表示にするのは教科書等でもよく見かける変形ですが，微分幾何や解析では典型的な考え方のパターンの 1 つなのですか． **お答え：** 考えやすい座標をとるというのは基本的な考え方です.

質問： 主方向等難しい単語が次々出てきて大変です． **お答え：** そうですね.

11 復習（前回の問題）

10-1 $S=\{(x,y,z)\,|\,x^6+y^6+z^6-1=0\}$ は滑らかな曲面であることを示し，S 上の点 (a,b,c) におけるガウス曲率を (a,b,c) で表せ．($K=25a^4b^4c^4/(a^{10}+b^{10}+c^{10})^2$)

10-2 ガウス曲率が -1 であるような回転面をすべて求め，その絵を描きなさい．（テキスト 79 ページ参照．擬球面が全てではない）

10-3 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の各点 $\gamma(t)$ が臍点でなく，その点における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が主方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$）を曲率線という．$\gamma(t)$ が曲率線であるとき，

$$q(t,s):=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)+s\nu\bigl(u(t),v(t)\bigr)$$

であたえられる曲面のガウス曲率を求めなさい．ただし $\nu(u,v)$ は曲面 p の単位法線ベクトル場である．($K=0$)

10-4 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ において u 曲線，v 曲線が曲率線であるとき，(u,v) を曲率線座標という．曲率線座標のもとでは第一基本行列と第二基本行列が共に対角行列であることを示しなさい.

10-5 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の各点 $\gamma(t)$ における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が漸近方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$）を漸近曲線という．とくに u 曲線，v 曲線が漸近曲線であるとき，(u,v) を漸近線座標とよぶ．漸近線座標のもとで，第二基本量は $L=0$, $N=0$, $M\neq 0$ （したがって，漸近線座標が存在すれば自動的にガウス曲率は負）となることを示しなさい.

10-6 一葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ の曲率線座標と漸近線座標を求めなさい．($p(u,v)=(\cosh u\cos v,\cosh u\sin v,\sinh u)$ とすると (u,v) は曲率線座標；$\xi=w+v$, $\eta=w-v$; $w=\tan^{-1}\sinh u$ とすると ξ,η は漸近線座標．)

2015 年 1 月 15 日