2015 年 1 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 13

お知らせ

- 次回 2 月 2 日は「補講」に充てますが,「まとめとさまざまな話題」をテーマとします．定期試験の「試験範囲」は今回の講義内容まででです.
- 授業評価アンケートにご協力お願いします．1 月 25 日 22 時現在，回答者 2 名です.
- 東工大の教育改革に関する web アンケートを実施中です：
http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/2015/029558.html こちらも非常に重要な調査です．お手数をおかけいたしますが，ご協力お願いいたします.

授業に関する御意見

- 計算ができなさすぎてとても悲しいです.... **山田のコメント：** 少しはできたほうが思考の助けになると思います.

質問と回答

質問： 曲率線座標，漸近線座標がうまく座標としてイメージできていないのですが，どういった座標系なのですか.

お答え： テキスト付録 B-5 参照.

質問： $p_u \perp p_v$, $-\nu_u = \lambda_1 p_u$, $-\nu_v = \lambda_2 p_v \Leftarrow p_u$, p_v：主方向，は黒板に書いてありましたが，$\Rightarrow$ は成り立ちますか? また，理由を教えて下さい.

お答え： 「$-\nu_u = \lambda_1 p_u$, $-\nu_v = \lambda_2 p_v \Leftrightarrow p_u$, p_v：主方向」が主方向の定義．また,「p_u, p_v：主方向 $\Rightarrow p_u \perp p_v$」は主方向の性質．後者の $\Leftarrow$ は成立しない.

質問： ガウス曲率や平均曲率を求めるとき，固有値と，第一，第二基本形式のどちらを使って求めるのが最も美しいのでしょうか.

お答え： 問題によると思います．ある種の量を求める方法が複数あったとして，一般に「こちらが美しい」と教条的に決める理由はあまりないと思います．むしろそうすることで思考の範囲を狭めるのではないでしょうか.

質問： Weingarten operator に関して，$W\colon \Pi_p \to \Pi_p$, $\alpha p_u + \beta p_v \mapsto (p_u, p_v)A\binom{\alpha}{\beta}$ という変換は，直観的にはどのような変換を行っているといえるのでしょうか?

お答え： 単位法線ベクトル ν の $\alpha p_u + \beta p_u$ 方向に関する変化率を表しています.

質問： 一様双曲面で $II = -\cosh u(d\xi + dv)(d\xi - dv)$ と表せると，$(\xi + v, \xi - v)$ が漸近線座標となる? が何故そうなるのかわかりませんでした．よろしければ大まかな証明をお教えください.

お答え： (1) 事実：(X, Y) が漸近座標系であるための必要十分条件は $II = \lambda\, dX\, dY$ の形にかける（$L = N = 0$）ことである（1 月 19 日の講義，およびテキスト付録 B-5, 定理 5.4)．(2) 第二基本形式はパラメータのとり方によらない．これらのことを用いれば，$X = \xi + v$, $Y = \xi - v$ とおくと，$II = (*)\, dX\, dY$ とかける.

質問： 擬球面は，なぜ擬球というのですか?

質問： ベルトラミの擬球は，見た目は球と全然違うのに，どうして擬 “球” と言うのですか?

お答え： 球面上の幾何学と，擬球面上の幾何学は非常に似た性質を持っていて，でもさまざまな符号が逆になる，ということによります．たとえば，テキスト §10 の問題 6 のように，単位球面上の三角形 ABC は

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi + (\text{三角形の面積})$$

を満たします（ガウス・ボンネの定理）が，擬球面上の三角形 ABC（3 つの測地線分で囲まれた単連結な図形）は

$$\angle \mathrm{A} + \angle \mathrm{B} + \angle \mathrm{C} = \pi - (\text{三角形の面積})$$

を満たします．擬球面は，局所的な「非ユークリッド幾何学のモデル」となっています（Beltrami）．

質問： 曲率線座標から漸近線座標を作る方法は目から鱗でした． **お答え：**でしょ．

質問： ついていけなくなりそうです． **お答え：**残念．

質問： 山田さんの言う通り分かってみると思ったよりも簡単なのかなと思いました．

お答え： でしょ．大抵のことはそうですが．

13 測地線

- 平面上の 2 点を結ぶ最短線は線分である．
- 曲面上の曲線 $\gamma(t)$ の加速度ベクトル γ'' が各点で曲面の法線方向を向いているとき，γ は測地線である，という．
- 曲面上の 2 点を結ぶ曲面上の曲線のうち，最短の長さのものがあればそれは，弧長パラメータに変換すれば「測地線」である．
- 球面の測地線は大円である．

問題

13-1 平面上の 2 点を結ぶ最短線が線分であることを示しなさい．

13-2 球面上の大円が測地線であることを示しなさい．

2015 年 1 月 26 日