2015 年 2 月 2 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 14

お知らせ

- 中間試験の答案は，数学事務室にて絶賛返却中．答案には定期試験の持込用紙が添付されていますので，必ず受け取って下さい．
- 「東工大の教育改革に関する web アンケート」
  http://www.titech.ac.jp/enrolled/news/2015/029558.html
  文部科学省に提出する改組案に添付する資料の基礎データになるそうです．回答数が少ないと，問題がおきるようです．定期試験期間中でお忙しいところ申し訳ありませんが，ご協力お願いいたします．
- 授業評価アンケートにご協力お願いいたします．
- 今学期もご聴講ありがとうございました．Good Luck!

授業に関する御意見

- 問題は毎週どれも難しかったです．いまでも未解決問題があります．
  山田のコメント： それは残念.
- 面白い性質をもつ非ユークリッド幾何を色々教えてください．　**山田のコメント：** 何が面白いかな.
- 今のところ平面曲線まで完ペキになったと思います．そのため，期末にも平面曲線を出していただけると大変助かります．
  山田のコメント： 承ってだけおきます.

質問と回答

質問： 「最短線」⇒「線分」の証明で，曲線 γ の表式を最終的に決定していたような気がするのですが，同じ 2 点間の線分で始点と終点が同じでも，表式は一意でないように思います．本質的に（パラメータ変換?）同じものだから 1 つに決めたのでしょうか?

お答え： 一つに決めてなんかいません．点 $(0,0)$ と $(L,0)$ $L>0$ を結ぶ最短線 $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ を考えるとき，$y(t)=0$ ですが $x(t)$ は「単調非減少」であるとしか結論していないはずです．0 から L までの値をとる単調非減少関数は無限個あるのでは?

質問： 球面上の測地線が大円であることの証明に際して，板書では t を弧長として計算していましたが，弧長に限定しない場合は γ' を $\dot\gamma$，γ'' を $\ddot\gamma$ に置き換えれば同じ話になるでしょうか.（$|\gamma|=1$ のおかげで).

お答え： そのとおりです.

質問： 測地線はどうして “地” を “測” る線というのですか?

お答え： たとえば，地球上で 2 点を結ぶ最短線を求めて 2 点間の “距離” を求めることを考えよう．このとき，最短線は地球上の（地面の上の）曲線であって，決して 2 点を結ぶ $\mathbb{R}^3$ の線分ではありません．“地面にそって距離を測る” ことに関係することだから... というのは今想像した（半分つくり）話です.

質問： 測地線はパラメータのとり方に依存するが，重要な概念であると仰っていましたが，具体的にはどういうことなのでしょうか．測地線を用いることで分かる幾何学的な事実があれば教えてください.

お答え： テキスト §10 のガウス・ボンネの定理はその一つ．リーマン多様体の「完備性」も測地線を用いて定義される．測地線の挙動と曲率の関係を調べると，多様体の位相と曲率の関係がわかる...

質問： 準測地線には物体のどのような運動が対応していますか.

お答え： 進行方向にのみ加速・減速する運動（と講義で説明した).

質問： 単位球面上の角度はどのように定義するのでしょうか?

質問： 球面上の角度は平面と同じように考えてもいいのですか? 平面が曲がっていると思ってしまうとどうも角度がどういうものか分からなくなりそうなので.

お答え： 曲線の接ベクトルがなす角.

質問： 問題 13-2 は弧長パラメータに変換すれば測地線であるということですか?

お答え： はい.

質問： Gauß-Bonnet の定理は非ユークリッド空間内でも成立しますか．また，この定理は n 次元や無限次元においても成立するんですか．もしそうならば n 次元においても "角度" という概念があるといえるでしょうか.

お答え： Gauß-Bonnet の定理は内的（第一基本形式によってのみ決まる）ので，曲面が入っている外の空間がなんであろうと成立します（今回少し説明します)．また，高次元化（外の空間を高次元化するのではなく，曲面に相当するもとの図形を高次元化すると理解してよろしいですね）するにはガウス曲率の概念を高次元化する必要があります．"Gauß-Bonnet-Chern の定理" で検索してみてください.

質問： 曲率等の概念は $n \geqq 3$ のときの $\mathbb{R}^n$ に埋め込まれた曲線や $(n-1)$ 次元多様体にも定義できると思うのですが，この授業を含めて $n = 2, 3$ のときばかり扱われるのはどうしてでしょうか? $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ を主な対象とする幾何学の研究は現在行われているのでしょうか．一般化したいです.

お答え： それがリーマンの仕事ですね．彼は「n 次元に広がっている対象」として高次元の多様体を考え，その上で現在「リーマン計量」と呼ばれる第一基本形式に相当する量をもつ「リーマン多様体」の概念を導入しました．ガウス曲率（これは第一基本量のみで表される，ということを紹介した）の高次元化として「リーマン多様体」の「断面曲率」を定義し，リーマン幾何学の枠組みを作りました（君が一般化するのではなくすでに一般化されている)．断面曲率の定義はちょっと複雑で（多様体の各点における接空間の 2 次元部分空間全体の集合（2-グラスマン多様体）からなるファイバー束上の関数となります）今の段階で説明するのは難しいこと，単純な 2 次元の場合でまず考えないと何をやっているかわからないだろうということで，曲面から入るのが自然だと思います．とはいえ，曲線や曲面にはその次元特有の事象があり，高次元の微分幾何学とはまったく違った様相が現れます．ちなみに山田の仕事の殆どは $\mathbb{R}^3$，3 次元空間形（断面曲率一定な 3 次元リーマン多様体）などの 3 次元空間の曲面に関するものです.

質問： この幾何学概論で学んだことは 3 年で学ぶどんな分野の基礎となるのでしょうか.

お答え： 多様体論.

質問： 考えている平面が閉であれば必ず 2 点間を結ぶ最短線は存在しますか.（図省略）上図左のような場合には必ずしも最短線は存在しないのではと思います.

お答え： 「平面」とは「平面の部分集合」のことですね．図は「最短線は存在するが，それが線分でない」ということではないでしょうか.

質問： 前から気になっていました．問題で，直線や点の記号が最初に与えていないときはその出題に何か糸はあるのですか.

お答え： ありません．試験問題や演習問題のような「矮小な」問題ではなく，普通考えるべき問題には最初から記号が指定されていないのが自然ですよね.