

### 幾何学概論 定期試験 [問題 1]

#### 注意事項

- 解答は、解答用紙の所定の欄に、採点者が読みとり、理解できるように書いてください。
- 計算や下書きには余白や裏面および所定の計算用紙を使用してください（採点の対象とはしません）。
- 試験終了後は、解答用紙、計算用紙と持込用紙を回収します。問題は持ち帰っていただいて結構です。
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません。問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し、正しいと思われる問題に直して解答してください。
- 答案はおそくとも 2 月 13 日には数学事務室（本館 3 階 332B）にて返却いたします。
- 採点に関する質問・クレームなどは 2015 年 2 月 20 日までに山田まで電子メールにてお申し出ください。上記期日以降のクレームは、たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません。ご了承下さい。また、返却答案を受け取らない方はクレームをつける権利がありません。

#### 指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の [1] ~ [15] にもっともよく充てはまる数・式を入れ、下線 a をつけた部分を証明しなさい。 [80 点]

$\mathbb{R}^2$  の領域  $U = (-1, 1) \times (-1, 1)$  上で定義された写像

(\*)  $p: U \ni (u, v) \mapsto$

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \left( u - \frac{u^3}{3} + uv^2, -v + \frac{v^3}{3} - u^2v, u^2 - v^2 \right) \in \mathbb{R}^3$$

を考える。次の文中の [1] ~ [15] に最もよく充てはまる数・式を入れ、後の問題 a に答えなさい。

- 式 (\*) の  $p$  は  $U$  全体で定義された微分可能な写像である。  
とくに、 $U$  上で  $\underline{a} p$  はなめらかな曲面の正則なパラメータ表示を与える。 $p$  の単位法線ベクトルは  $\nu =$  [1], 第一基本形式は  $ds^2 =$  [2], 第二基本形式は  $II =$  [3] となるので、この曲面の主曲率は [4], ガウス曲率は [5], 平均曲率は [6] である。
- この曲面  $S$  上の点  $P = p(a, 0)$  ( $a \in (-1, 1)$ ) における接ベクトル空間  $\Pi_P S$  は [7] で生成される  $\mathbb{R}^3$  の [8] 次元部分空間である。いま、実数  $\alpha, \beta$  ( $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ ) に対して、 $(u, v)$  平面上の  $(a, 0)$  を通る曲線

$$\gamma_0(t) = (u(t), v(t)) = (a + at, \beta t)$$

に対応する曲面上の曲線  $\gamma(t) = p(u(t), v(t))$  の点  $P$  における法曲率は [10],  $(\alpha, \beta)$  を動かしたときの法曲率の最大値は [11], 最小値は [12] となる。

- 定数  $a \in (-1, 1)$  に対して、曲面上の曲線  $\sigma(t)$  を  $\sigma(t) = p(a, t)$  で定める。このとき、 $\sigma$  の加速度ベクトル  $\ddot{\sigma}$  を曲面に接する成分と法線方向の成分に分解するとい

$$\ddot{\sigma}(t) = [13] + [14] \quad \left( [13] = [\ddot{\sigma}(t)]^T, [14] = [\ddot{\sigma}(t)]^N \right)$$

となるから、 $\sigma(t)$  が測地線になるのは [15] の場合である（測地線になりえないならば、解答欄に × を記しなさい）。

問題 B 零でない定数  $a$  に対して、弧長  $s$  に関する曲率関数  $\kappa(s)$  が  $\kappa(s) = a \cos s$  となるような平面曲線を  $\gamma_a(s)$  と書くことにする。  $\gamma_a(s)$  が周期  $2\pi$  の閉曲線になるような実数  $a$  は存在するか。 [10 点]

問題 C 次の (1) ~ (3) から一つを選んで解答しなさい。 [10 点]

- (1) 曲面  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\}$  上の点  $(a, b, c)$  におけるガウス曲率を求めなさい。
- (2) 一葉双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$  の曲率線座標と漸近線座標を求めなさい。
- (3) 「ガウス曲率は内的な量である」とはどういうことか説明しなさい。

問題 D [0 点] なにか言い残すことがありましたらお書きください。なお、この問いへの回答は成績に一切影響しません。

おつかれさまでした ♡

問題 A の解答欄 1-15:各5点(4-10点) 幾何学概論 定期試験 (解答用紙 1)

$1^t \left( \frac{2u}{1+u^2+v^2}, \frac{2v}{1+u^2+v^2}, \frac{u^2+v^2-1}{1+u^2+v^2} \right)$ <small>転置はあってもなくてもよい</small>		
$2 (1+u^2+v^2)^2 (du^2+dv^2)$		
$3 -2(du^2-dv^2)$		
$4 \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}, \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$	$5 \frac{-4}{(1+u^2+v^2)^4}$	$6 0$
$7 \left\{ \begin{pmatrix} 1-a^2 \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$8 2$	$9$
$10 \frac{-2(\alpha^2-\beta^2)}{(1+a^2)^2(\alpha^2+\beta^2)}$	$11 \frac{2}{(1+a^2)^2}$	$12 \frac{-2}{(1+a^2)^2}$
$13 \frac{2}{1+a^2+t^2} \begin{pmatrix} a(-1+a^2+t^2) \\ t(-1+a^2+t^2) \\ -2(a^2+t^2) \end{pmatrix}$	$14 \frac{2}{1+a^2+t^2} \begin{pmatrix} 2a \\ 2t \\ -1+a^2+t^2 \end{pmatrix}$	$15 \times$

問題 a

$$p_u = (1-u^2+v^2, -2uv, 2u) \quad p_v = (2uv, -1-u^2+v^2, -2v)$$

だから

$$p_u \times p_v = (2u(1+u^2+v^2), 2v(1+u^2+v^2), -1+(u^2+v^2)^2),$$

$$|p_u \times p_v|^2 = (1+u^2+v^2)^2 > 0$$

となり,  $p_u, p_v$  はつねに一次独立である.

学籍番号	氏名
------	----

幾何学概論 定期試験 [ 解答用紙 2 ]

問題 B の解答欄 10点

存在する

$\theta(s) = \int_0^s \kappa(u) du = a \sin s$  とおけば,  $\gamma_a(s)$  は (回転と平行移動をのぞいて)

$\gamma_a(s) = \left( \int_0^s \cos \theta(u) du, \int_0^s \sin \theta(u) du \right)$  と表される. ここで  $\theta(s)$  は周期  $2\pi$  をもつので,

$$\begin{aligned} \gamma_a(s+2\pi) &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du + \int_{2\pi}^{2\pi+s} (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du + \int_{2\pi}^{2\pi+s} (\cos \theta(2\pi+u), \sin \theta(2\pi+u)) du \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du + \int_0^s (\cos \theta(u), \sin \theta(u)) du \\ &= \gamma_a(s) + \left( \int_0^{2\pi} \cos(a \sin u) du, \int_0^{2\pi} \sin(a \sin u) du \right) \\ &= \gamma_a(s) + \left( \int_0^{2\pi} \cos(a \sin u) du, 0 \right) \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで最後の等式は  $\sin(a \sin u)$  が周期  $2\pi$  の奇関数であることによる. したがって,  $\gamma_a$  が周期  $2\pi$  をもつためには  $F(a) = \int_0^{2\pi} \cos(a \sin u) du$  が 0 となればよい. いま

$$\begin{aligned} F(a) &= \int_0^\pi \cos(a \sin u) du + \int_\pi^{2\pi} \cos(a \sin(2\pi-u)) du = 2 \int_0^\pi \cos(a \sin u) du \\ &= 2 \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \sin u) du + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos(a \sin(\pi-u)) du \right) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a \sin u) du \\ &= 4 \left( \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(a \sin u) du + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \left( a \cos \left( \frac{\pi}{2} - u \right) \right) du \right) \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(a \sin u) + \cos(a \cos u)) du \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{a}{2} (\sin u + \cos u) \right) \cos \left( \frac{a}{2} (\sin u - \cos u) \right) du \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \left( u + \frac{\pi}{4} \right) \right) \cos \left( \frac{a}{\sqrt{2}} \sin \left( u - \frac{\pi}{4} \right) \right) du \end{aligned}$$

である. とくに  $F(0) = 2\pi > 0$  であるが,

$$\cos \left( \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \left( u + \frac{\pi}{4} \right) \right) < 0, \quad \cos \left( \frac{\pi}{\sqrt{2}} \sin \left( u - \frac{\pi}{4} \right) \right) > 0, \quad \left( 0 < u < \frac{\pi}{4} \right)$$

なので  $F(\pi) < 0$ .  $F$  は  $a$  について連続だから, 中間値の定理より  $F(a) = 0$  となる  $a$  が存在する.

学籍番号

氏名

幾何学概論 定期試験 [ 解答用紙 3 ]

問題 C の解答欄

← 選択した問題番号を記入する .

- (1)  $f(x, y, z) = (x^4 + y^4 + z^4 - 1)$  とおけば,  $S = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$  と書ける .  
 $(f_x, f_y, f_z) = 4(x^3, y^3, z^3)$  だが,  $f(0, 0, 0) = -1 \neq 0$  であるから  $S := \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) = 0\}$   
上で  $(f_x, f_y, f_z) \neq 0$  . したがって陰関数定理により  $S$  はなめらかな曲面を与えている .  
とくに  $z \neq 0$  となる点の近くで,  $S$  は  $z = z(x, y)$  のグラフで表すことができる:

$$p(x, y) = (x, y, z(x, y)).$$

陰関数の微分公式を用いれば,  $z_x = -f_x/f_z = -x^3/z^3$ ,  $z_y = -y^3/z^3$  であるから,

$$p_x = \left(1, 0, -\frac{x^3}{z^3}\right), \quad p_y = \left(0, 1, -\frac{y^3}{z^3}\right).$$

したがって, 第一基本量は  $E = 1 + (x/z)^6$ ,  $F = (x^3y^3)/(z^6)$ ,  $G = 1 + (y/z)^6$  となり,

$$EG - F^2 = \frac{x^6 + y^6 + z^6}{z^6}, \quad \nu = \frac{1}{\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}}(x^3, y^3, z^3).$$

ここで  $z_{xx} = -\frac{3x^2}{z^3} + \frac{3x^3}{z^4}z_x = \frac{-3x^2}{z^7}(x^4 + z^4)$ ,  $z_{xy} = \frac{-3x^3y^3}{z^7}$ ,  $z_{yy} = \frac{3y^2}{z^7}(y^4 + z^4)$  だから,  
第二基本量は

$$L = \frac{-3x^2(x^4 + z^4)}{z^4\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}}, \quad M = \frac{+3x^3y^3}{z^4\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}}, \quad N = \frac{-3y^2(y^4 + z^4)}{z^4\sqrt{x^6 + y^6 + z^6}},$$
$$LN - M^2 = \frac{9x^2y^2(x^4 + y^4 + z^4)}{z^4(x^6 + y^6 + z^6)} = \frac{9x^2y^2}{z^4(x^6 + y^6 + z^6)}.$$

ここで, 最後の等式は,  $S$  上で  $x^4 + y^4 - z^4 - 1 = 0$  であることを用いた .  
以上から,  $z \neq 0$  なる点では

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{9x^2y^2z^2}{(x^6 + y^6 + z^6)^2}.$$

とくに右辺は  $(x, y, z)$  の連続関数だから,  $z = 0$  でも等式が成り立つ .

$$\underline{\text{点 } (x, y, z) = (a, b, c) \text{ におけるガウス曲率は } K = \frac{9(abc)^2}{(a^6 + b^6 + c^6)^2}.$$

学籍番号

氏名

幾何学概論 定期試験〔解答用紙 4〕

計算スペース（この用紙も提出してください）

学籍番号	氏名
------	----

幾何学概論 定期試験〔解答用紙5〕

この用紙も提出してください

問題 D [0点] なにか言い残すことがありましたらお書きください。なお、この問いへの回答は成績に一切影響しません。

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります。ご自分の学籍番号の座席に着席してください。

試験開始： 次の条件が満たされましたら、解答用紙・問題用紙を配布します。

- 受験者が着席していること。
- 各受験者が、筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティッシュペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞆に入れ、机の下か足元に置いていること。
- 私語がないこと。

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は1枚両面、解答用紙は5枚（この紙を含む）です。

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください。
- 解答用紙5枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出してください。持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが、解答用紙が5枚揃っていない答案は採点いたしません。
- 解答は所定のスペースに記入してください。欄外や裏面は採点の対象にしません。
- 問題用紙は提出せず、お持ち帰りください。

試験終了・回収： 指示に従わない場合、不正行為とみなすことがあります。

- 終了の合図がありましたら、筆記用具をおいてください。
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい。私語は禁止。
- 答案は、上から、解答用紙1, 解答用紙2, 解答用紙3, 解答用紙4, 解答用紙5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください。
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左、最左端の壁際まで送ります。その際、自分の答案用紙を、受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい。
- 教室最左端の席の方は、答案用紙の束を机の上おき、回収を待ってください。試験監督が回収を行います。
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です。

学籍番号

氏名