

2015年6月16日(2015年6月23日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 2

お知らせ

提出物は後ろの机にて返却しています。なお、コメントの字が汚くて読めないかもしれませんが、これは山田用のメモです。正式なコメントはこの用紙にあります。

前回までの訂正

- 講義資料 1 に演習の条件を加えました：
 - 中間試験と定期試験の 2 回を受験するのが単位を得るための必要条件です。
 - 成績は、講義 (2 単位) と演習 (1 単位) をセットでつけます。この科目の定期試験の成績と、演習での小テストのスコアがともに一定の基準以上の方は単位を得ることができます。
 - 成績が境界未満の方は、中間試験・提出物のスコアを考慮することがあります。
 - いわゆる出席点はつけません。したがって出席もとりません。しかし、出席と関わりなく授業時間中に連絡したことは伝わっているとみなします。いかなる理由であろうとも、欠席された方は、その授業時間で何がなされたか、という情報を次の回までに仕入れておいてください。
 - 定期試験後、答案を返却し、成績を確認していただきます。採点、成績に関するクレーム・質問は期間を限って受け付けます。日程は、試験の際にお知らせ致します。なお、成績に関する議論は、提出されたもの (答案・提出物) に書かれていることのみを材料とします。
- 試験を受けることが「必要十分条件だ」と口頭言ったそうです。「必要十分条件ではない」です。
- 口述したこと: 「円のパラメータ表示は $(\cos t, \sin t)$ 」 \Rightarrow 「 $(\cos t, \sin t)$ は円のパラメータ表示」
- 講義ノート 1 ページ脚注 4: 「実数とはは」 \Rightarrow 「実数とは」
- 講義ノート 5 ページの脚注 17 の記号 “:=” が誤りというご指摘がありましたが、これで正しいです。“:=” の意味を説明しています。
- 講義ノート 8 ページ, 4 行目: 「 C^∞ -級である」 \Rightarrow 「何回でも微分可能 (C^∞ -級, 第 3 回参照) である」

授業に関する御意見

- コピーする時間がないです。 山田のコメント: そうですね。写真をとったらどうでしょう。
- 配布ノートの練習問題の解答はどちらにありますか? 山田のコメント: 講義 web ページをくまなく探すとみつかります。みつけたらクラスメイトと共有しましょう。
- 期末テストは予備日に解きたいです。一限にこれないので。 山田のコメント: 検討しましたが、採点・成績評価・フィードバックの時間を考えると全曜日難しいです。
- マイクの音量をもう少し上げて欲しいです/ 聞こえづらいです/ 声が少しききとりずらかったです/ 声が聞き取りにくい時が多々ありました/ 授業全般で声が聞きにくかった/ 自分の耳のせいでもありませんが、少し声が聞こえないときがあります/ もう少しマイクの出力を大きくしていただきたいです。 山田のコメント: Sorry. 了解です。ハウリングが起きない程度にあげてみましょう。
- スライドが見難く、声が聞き取りにくいので、黒板前の証明を落とし、マイクの音量を上げて頂ければ幸いです。自分も前に座るようにします。 山田のコメント: Sorry. 了解です。
- スライドを使うのなら前の電気を消してほしいです。とても見にくいです/ スライドの前の電気がついていたので見にくかったです。 山田のコメント: Sorry.
- スライドの文字を大きくしてくれとありがたいです。 山田のコメント: 小さいですか? あまり大きくするとページめくりが増えるな、と思っています。いずれにせよ (1) スライドから直接メモをとるような内容は用いしません (2) スライドのハンドアウトは web ページに上げます。もう少し周囲を暗くすると字が見やすくなるかもしれません。
- 外国人の自分には速く書いた字が読みにくい。 山田のコメント: Sorry. 努力します。
- 日本語をきれいにしてほしいです/ 漢字はまだしも、sin 等や数字はもう少し丁寧に書いて欲しいです/ 板書をもう少しきれいにしてほしい。 山田のコメント: Sorry.
- (略) この「数」の省略は普通に読めないです。 山田のコメント: Sorry. でも読めているわけ
- 先生の漢字が読めない部分が多かったです。 山田のコメント: Sorry!
- 先生の字は速筆です! 山田のコメント: 読みにくい?
- 字が小さい。 山田のコメント: 黒板 1 枚に一行くらいがいい?
- 文字の大きさが大きくて良い。今後も今回くらいの大きさを書いてください。 山田のコメント: なるべくそうします。黒板がちょっと小さいですね。
- 字がとても読みやすかったです/ 字が大きくていいと思いました/ 字が大きいのでみやすかったです。 山田のコメント: Thanks.
- 黒板に教授が書いた字の形がステキです。 山田のコメント: はあ
- たのしい授業です。高校のとき、日本の数学を勉強しているとき、何故中国と日本の数学で使われている漢字は違っているのかということがわかりました。 山田のコメント: 関数 vs. 函数 のことですね。共通の単語もたくさんありますね。
- 上品な質問ってなんですか? 山田のコメント: なんでしょう。下品な質問 (試験でこんな問題をだしますが、など) は自明なんですけどね。
- 物理出てきていたけど、いままで微積をやっていないからよくわからずに使っていた言葉の定義がわかったのでよかったです。 山田のコメント: そうかもね。
- 物理のために微積を先にやってほしかった。 山田のコメント: なるほど。
- 新しい関数の導入は分かりやすかった。 山田のコメント: Thanks.
- 色々な知識が身につけて良かった。 山田のコメント: よかった。
- 割とむくならなかった。 山田のコメント: 昼はちょっとつらいね。
- 話がすごく面白かったです/ とても面白い授業でした/ 先生が面白くやる気がました! 山田のコメント: Thanks.
- 笑う人とそうでない人の二極化が進みそうな授業だなと。ちなみに私は前者です。 山田のコメント: よく言われます。

- 先生のギャグのセンスが素晴らしいと思います!! 山田のコメント: そうですかねえ.
- 先生は説明するとき笑顔で、見ていて楽しいです/ とても分かりやすく優しい笑顔が素敵でした. 山田のコメント: なるほど. 笑顔の仮面の下に隠された...
- 言葉に関する話が面白かった. 山田のコメント: そう?
- 言葉にこだわるスタイルはよいと思います. とても. ただし, とくどき先生が早口で言葉が聞き取れないことがあるので, たまにはゆっくり話してください. 山田のコメント: Sorry.
- スピーディーでも楽しい授業だったと思います. 山田のコメント: もう少しゆっくりしたいね.
- たのしかった. 山田のコメント: そう?
- 非常に興味深かったです. 山田のコメント: Thanks.
- 分かりやすいです/ 分かりやすかった/ わかりやすいです. 山田のコメント: そう?
- 満員電車でハイヒールで足を踏まれた時に出る声「イー」が個人的にツボだった. 山田のコメント: あ, そう. このネタはあまりうけないですね.
- 中間試験の話で中間値の定理を用いていたのがおもしろかった. 山田のコメント: はい. こういうネタでたいてい通じるのが東工大ですね.
- 微積分が高校時代よりさらに難しくなりそうです. 山田のコメント: そりゃ当たり前だ.
- いろんな話がきけそうに楽しそうだった. 山田のコメント: できるとよいけど.
- 大学の微積分は楽しみなので, 期待してます!/ 面白い授業を期待している. 次回が楽しみである. 山田のコメント: プレッシャーをかけないで!
- ガウス積分が理解できるようになるのは嬉しい. 山田のコメント: ですね. 入試にも出たね.
- 乾いた僕の心を微積分で潤して下さい. 山田のコメント: どうやって? (仕様外)
- 先生のサスペンダースタイルが C[∞]-ute でした. 山田のコメント: なんて読むの?
- オーキードーキー 山田のコメント: 了解(え?)
- がんばります... 山田のコメント: はい.
- これからもよろしくお願いいたします (2件) 山田のコメント: こちらこそ.
- まだなんとも言えません. 山田のコメント: そうですよ.
- 特になし/ なし. 山田のコメント: me, too.

質問と回答

質問: $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\tan x}$ をわざわざ $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$ と書くのはなぜですか? よく使うからということですか?/ どうして \cot と \sec と \csc を導入する必要があるのですか? \tan と \cos と \sin の逆数のままでは不都合があるのですか?/ 余接 cotangent, 正割 secant, 余割 cosecant を導入する意味とは?/ $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$ という記号を使う意味があるのか.

お答え: 昔から使っている人が多いので, その記号がかかっている文を読める必要がある. 漢字を覚えるのと一緒.

質問: $\frac{1}{\cos x}$, $\frac{1}{\sin x}$, $\frac{1}{\tan x}$ をわざわざ $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$ と表してややこしくする必要はあるのですか?

お答え: ややこしいですか? 1行ですっきり書けるとおもいますが.

質問: $\sec x$ や $\csc x$ はどういときに使うのか. $\sin x$, $\cos x$ だけで十分ではないのか.

お答え: $\tan x$ も $\cos x$ と $\sin x$ で表されるので必要ないような気がしますね. $\tan x$ は許容できますか?

質問: $(\cos x)^{-1} = \sec x$, $(\sin x)^{-1} = \csc x$ なのはわかりづらすぎるなぜ逆なのか?

お答え: 句読点をつきましょうね. <http://ocw.mit.edu/ans7870/18/18.013a/textbook/HTML/chapter02/section02.html> の図をみて感じて下さい.

質問: 正弦が $\sin x$, 余弦が $\cos x$, 正割が $1/\cos x$, 余割が $1/\sin x$ 同じ正, 余なのに \sin と \cos が入れ換わって分かりにくいです. 正と余ってそもそも何ですか. お答え: 「余」は接頭語 “co” の訳語. 辞書を見よ.

質問: 初歩的な問いですが, 余接, 正割, 余割は何を意味しているのでしょうか? こういった日本語があてられていることが分かりません. お答え: tangent, secant の意味は? ところで「正弦」や「余弦」の意味はお分かりですか?

質問: $y = \sin^{-1} x$ が $x = \sin y$ を表すとき, $\frac{1}{\sin x}$ は $(\sin x)^{-1}$ と表せばいいですか? お答え: はい. $\csc x$ でもよい.

質問: \arccos は \cos^{-1} というのですが, \sin , \tan も同じく $\arcsin = \sin^{-1}$, $\arctan = \tan^{-1}$ でいいのですか. それ以外は今日はあまり数学についてやっていないので理解しました. お答え: いいのです.

質問: $(\cos x)^{-1} \neq \cos^{-1} x$ という説明がありましたが, $(\cos x)^{-2}$ と $\cos^{-2} x$ は等しいですか?

お答え: そういう曖昧なことがおきる事情がありますので $\cos^{-2} x$ という書き方はしないようです.

質問: $\sec x$ の $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ (n は整数), $\csc x$ の $x = n\pi$ (n は整数) のときは定義されないのか.

お答え: 定義されません. $\cot x$ の定義域はどうなるでしょうね.

質問: \cot , \csc などの読み方は何ですか? お答え: 講義ノート 5 ページ.

質問: $y = \tan x$ を x で微分したときに $\frac{1}{\cos^2 x}$ よりも $1 + \tan^2 x$ にしたほうがよい理由がいまいち (原文ママ: どこまでわかっているのか) わからない. 具体的な例が欲しいです.

お答え: $y = \tan x$ なら $y' = 1 + y^2$. したがって $y'' = 2yy' = y(1 + y^2) = y + y^3$, $y''' = (1 + 3y^2)y' = (1 + 3y^2)(1 + y^2)$. したがって $(\tan x)''' = (1 + 3\tan^2 x)(1 + \tan^2 x)$. この計算を $1/\cos^2 x$ からやっごらん.

質問: 何故三角関数だけ $\cos^{-1} x = \frac{1}{\cos x}$ のように処理されず, まるで行列式の $AA^{-1} = E$ のように処理されているのでしょうか. お答え: 「処理する」はどのような意味で使っていますか? 「行列式」は誤用. 回答: 古来の習慣.

質問: $\cos^{-1} x$ と $(\cos x)^{-1}$ の違いは何ですか? (2件) お答え: 前者は講義ノート定義 1.6 の意味, 後者は $\sec x$.

質問: $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ となるのはなぜですか (4件) お答え: 講義ノート 6 ページ, 例 1.7 (1).

質問: $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ になる理由. 左辺が定数になることはわかったが, なぜ $\frac{\pi}{2}$ になるのか. (2件)

お答え: $x = 0$ を代入してみよ.

質問: $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ の導出の仕方がわかりません (2件) お答え: 講義ノート p. 7.

- 質問: $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x$ の微分をどうやるのか理解できない. お答え: 講義ノート 7 ページ 8 の公式を適用する.
- 質問: 三角関数の微分の公式から x だけの式がでてくるのに違和感があるのですが, 暗記しておぼえるしかないのですか?
- お答え: まず $\cos x$ の微分は $-\sin x$ で x だけの式 (変数は x しか含んでいませんね) となっていますが, そういうことを言っているんですか? 推測しますと (たいてい推測しませんが, 今回は気が向いたので) 逆三角関数の微分のこと, 導関数が x の「有理式」や「無理式」になるということですか? きちんと言葉で表しましょうね. 細かいことですが「暗記して覚える」は「暗記する」か「覚える」だと思います. 回答: なぜ違和感があるのでしょうか. $\log x$ の導関数が $1/x$ となるのは受け入れられますか?
- 質問: $f(x) = \sin^{-1} x$ と書くとき, 定義域 $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ は必ず添えて書かなくてははいけませんか? また $f(x) = \text{Sin}^{-1} x$ として定義域 $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ を省略できますか.
- お答え: この講義では逆三角関数の定義は講義ノート 6 ページのものを採用します. したがって $\sin^{-1} x$ の定義域は $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ なので, わざわざ書く必要はありません. 文脈によっては $\sin^{-1} x$ で「いくつもの値を取りうる関数もどき」を表し, $\text{Sin}^{-1} x$ でこの講義での逆正弦関数を表すこともあります. その場合書き方が違ってきますね.
- 質問: 大体わかった. 逆三角関数をどこで使うのでしょうか? なんで逆三角関数の考え方を始めたのだろうか?
- 質問: 逆三角関数をよく使うと言っていたが, 実際に何を求めるために使うんですか?
- お答え: 無数の応用例のうちたった一つだけあげましょう: 問題 1-15.
- 質問: 逆三角関数の計算が手こずって遅くなってしまいが, 演習あるのみだろうか.
- お答え: 三角関数の計算はどうやってなれました?
- 質問: 逆三角関数のグラフを描いて説明して下さったのがよくわからなかった. 逆関数の定義域がなんでそうなるのかわかりません. お答え: 逆三角関数のグラフは書いていない. 三角関数のグラフを書いたつもり. 逆三角関数の定義域は「そうなる」のではなく「そう決める». 説明したのは「そう決めると都合がよい」という理由です.
- 質問: 双曲線関数の具体的なものが方物線 (原文ママ: 放物線 (拋物線) のことか?), 楕円, 双曲線以外分らないです.
- お答え: 放物線や楕円や双曲線は双曲線関数ではありません. 完全に間違っています. ちなみに「曲線」と「関数」は全く別の概念です. ご質問は「トマトを 3V」と言うのに近いです (たとえはいい加減なのであまり気にしないで).
- 質問: 双曲線と円関数がどう対比されている (何が逆?) のかわからない.
- お答え: 双曲線ではなく双曲線関数ですよ. 逆とは一言も言っていないはず.
- 質問: \log が自然対数が常用対数かの区別を文章の前で説明されていることはありますか?
- お答え: 前ではないですが「ただし \log は常用対数を表すものとする」というようなフレーズはみたことがないですか?
- 質問: 自然対数は「微分すると x^{-1} となり, その係数が 1 になるから大事」と言っていたが, なぜ微分して x^{-1} となると大事なのか. お答え: $(\ln x)' = 1/x$ は大事な式では? 底が e でなければこんなに綺麗にはならないのだから.
- 質問: 高校で自然対数の底 e についてあまり習わなかったのですがなぜ $f(x) = \log x$ について $f'(x) = \frac{1}{x}$ であることが重要なかわかりませんでした. なぜこのことが重要なのですか? お答え: 質問の意味がとれないが, $\log x$ の微分ができるのは重要では? 高校で e をあまり習わないとして, 指数・対数の微積分をどう習ったんですか?
- 質問: e はネイピアの数とよばれるのではないのでしょうか. お答え: たしかに. それに合わせれば π はルドルフの数.
- 質問: 自然対数の底の定義は結局なんですか? お答え: いろいろと同値な定義があります.
- 質問: 授業中に自然対数の底の話がでてきましたが e のでどころは以下のどれなのですか? (根本的な理由について)
- (1) $f(x) = \square^x$ としたとき $f'(x) = \square^x$, すなわち $f(x) = f'(x)$ が成り立つような \square を e とした.
 - (2) $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$ で $x \rightarrow +\infty$ としたとき, $f(x)$ が近づいていく値を e とした.
 - (3) 2本の電柱にたらしした電線の形を関数であらわすと e がでてくる. 自然現象を数値化するとき頻出する値を e とした.
 - (4) その他
- お答え: (3) はよくわかりませんね. 電線の形を測って e を出す具体的なレシピがないので. (1), (2) とも e の定義に採用されます. 同値な定義がたくさんあって, どれも使われます.
- 質問: e (exponential) は何のために定義されましたか.
- お答え: e は数, exponential は関数ですがどちらを聞いていますか? 指数関数は非常に基本的な関数で, さまざまな現象と関係がつかますので, 「ある目的のために定義された」は当てはまらないと思います.
- 質問: $\cosh x, \sinh x$ などは双曲線関数なので, 双曲線の x 座標, y 座標を表していることがわかるが, $\sec x$ などは何を表したものののだろうか. また, 楕円関数 (原文ママ: 楕円関数のことか) について知りたい.
- お答え: 2 ページの URL を参照. 「楕円」の字の誤りについては講義で説明した. ひょっとしたら「双曲線関数」と同じ文脈で「楕円関数」を想像しているかもしれませんが, 数学用語としての楕円関数は全く別のところにあります (以下, 意味はわからなくて結構です: 複素平面上の二重周期をもつ有理型関数を楕円関数という).

質問： 双曲線関数はどのようなときに効力を発揮するのですか/ 双曲線関数はどのようなときに使うと効力を発揮するのですか/ 双曲線関数の使いどころも知りたいと思いました/ \cosh や \sinh は関数電卓で見かけることがあります。ですが、実験などやっけていても、計算で使ったことは一度もありません。電卓の機能に入れるほど \cosh や \sinh は頻繁にでてくる(使う)ものなのですか? またどんなことに活用するのですか/ $\cosh x$ と $\sinh x$ は何に使うことがあるんですか。(2件)

お答え： あまりにもたくさんの場面があります。懸垂線って知ってますか?

質問： $\cosh x$, $\sinh x$ のもっとも有益な使用例を知りたい。たとえば、ある積分をとくには、 $\cosh x$ や $\sinh x$ が必要だとか。お答え：講義ノート 12 ページ、問題 1-13。「積分をとく」という言い回しに違和感を持ちます。「積分を求め」「積分を計算する」では?

質問： どうして $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ とおくことになったのですか。

お答え： 18 世紀にはすでに使われていたようですので、経緯は明らかではないと思います。さまざまな(本当にたくさんの)便利な場面があるからだと思います。

質問： 双曲線関数のところで、なぜ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ と表せるのでしょうか? それとも定義なのでしょう? お答え：講義ノート 8 ページ。定義って書いてありますね。

質問： なぜ $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ で $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ なのかわかりません。

お答え： そう決めるのです。そう決めると気持ち良い、という background はありますが(次回少し説明するかもしれませんが)、論理的には「これで定義する」だけです。なぜ、という理由はありません。

質問： ハイパボリックの式は単純に 定義という理解で大丈夫でしょうか?

お答え： 「定義という理解」ではなく「定義」です。ぼかしていう癖はやめた方がよいです。

質問： 指数関数の単なる和や差で表される $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ や $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ がなぜ綺麗に双曲線の関数になるのかわかりません。

お答え： この講義では「双曲線の関数」という語は一度も使っていないと思います。どういう意味でしょうか。

質問： hyperbolic functions の導出されたいきさつが気になります。双曲線のパラメータ表示を与えるのに、 \exp が出現することが必然なのかどうか気になりました。

お答え： むしろ三角関数(Euler の公式で指数関数と関係がついている)との類似の気がしますが、まあ、ただの定義と思っていて問題はないでしょう。

質問： $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ と $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ についてはあまり理解できませんでした。 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ の間の関係性はなんとなくわかりましたが、 $\cosh x$ や $\sinh x$ と $\tanh x$ と三角関数とはどのような関係があるのでしょうか? 双曲線関数と $\cosh x$ などの関係は三角関数と円関数の関係とほぼ同じであると理解してもよろしいのでしょうか。 $\cosh x$, $\sinh x$, $\tanh x$ は三角関数の性質とは正反対なのかしら、この数値は常に 1 より大きいようですが。

お答え： 「双曲線関数と $\cosh x$ などの関係は三角関数と円関数の関係とほぼ同じであると理解してもよろしいのでしょうか。」の部分がよくわかりません。双曲線関数の一つとして $\cosh x$ があるのです。三角関数と似た性質がありますが、とりあえずは「似た性質」だけでよいと思います。次回、少し補足するかもしれません。

質問： 双曲線関数と三角関数は似た性質をもつが、直接的な関係性、つながりがあるのかどうか疑問に思った。

お答え： 次回少し補足するかも。

質問： 双曲線の一部を $\cosh t$, $\sinh t$ で表すメリットは何ですか。お答え：うれしい。

質問： $\cosh x$, $\sinh x$ は円をパラメータ表示するときの $\sin x$, $\cos x$ のようなものの双曲線版という認識で良いのでしょうか。また $\cosh x$, $\sinh x$ が $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ (原文ママ: x が一つ抜けてる)と表すことができるのと同じように $\sin x$, $\cos x$ も e を用いて表すことができますか?

お答え： 「認識」の意味が分からないので前半は回答不能。「双曲線のパラメータ表示」なら、双曲線関数でなくてもできる(たとえば $x = \sec t$, $y = \tan t$)ので、「双曲線の表示」を双曲線関数の定義とはできません。後半に「 e を用いて表すことができる」ように書いてありますが、表せるのではなく、「定義にする」のです。

質問： 初等関数でない関数のグループにも名前がありますか? また、初等関数を初等関(原文ママ: 初等関数のこと?) でない関数だけで書くことはできますか?

お答え： 前半：たとえば「楕円関数」という関数のクラスがあったりします。ただいつでも「その他」のほうがずっと大きいクラスです。後半：ひとつ初等関数でない関数 $F(x)$ をとりましょう。このとき $f(x) = \sin x + F(x)$, $g(x) = -F(x)$ はいずれも初等関数ではないですが、 $\sin x = f(x) + g(x)$ となりますので「初等関数でない関数を用いて初等関数を表すことができた」ということとなります。馬鹿馬鹿しいですが。

質問： どうしたら $\int_0^x e^{-t^2} dt$ が初等関数でないことと証明できるのでしょうか。

お答え： 自明でも初等的でもありません。Liouville によるものがオリジナルのようです。

質問： 初等関数を無限個使えば表せる初等関数でない関数の例を上げてください。

お答え： 無限級数 $x - \frac{x^3}{3 \cdot 1} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n!}$ は $a_n x^n$ の形の初等関数の無限個の和である。

この級数は任意の x に対して収束し（後期・微分積分学第二で扱う）その和は $\int_0^x e^{-t^2} dt$ に一致する。

質問： 初等関数でない関数の例を教えてください。 お答え： 講義で挙げましたよね。

質問： $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ が初等関数でないというところで、初等関数と初等関数でない関数の違いは、 $\int e^{-t^2} dt$ ができないから、値として出せないが、かそうで値が出るものとして見なすことによって関数として見なすのか、それとも他に理由があるのかわからない。

お答え： 「値として出せない」ということが何を指しているのかわかりません。 x を与えれば積分の値は確定します。

質問： 初等関数でなくても微分できる事はわかったのですが、微分可能の時に連続という事は習ったのですが、微分可能の条件がわかりません。微分可能の条件が気になります。 お答え： 第 2 回・講義ノート 16 ページ。

質問： 初等関数は今まで習った関数のくみ合わせで表されると言われたが、それを積分したら初等関数にならなくなるのはなぜですか？ お答え： いつも初等関数にならないわけではないが、ならない具体例があるのだからしょうがない。有理関数（多項式/多項式）の原始関数は必ずしも有理関数になるとは限らないことは受け入れられますか？

質問： 初等関数でしかできない操作には何がありますか？ お答え： ご質問の意味、とくに「操作」という語の意味がわかりません。それでは「初等関数たいしてできる操作」「にしかできない」でなくていい」というものには例えばどんなものがあるか教えていただけませんか？あるいは「初等関数にたいしてできない操作」でもよいです。

質問： 関数を「写像」と理解していたのですが「規則」と理解し直した方がよいのでしょうか？それともいずれの表現にも違いは無いのでしょうか。 お答え： 写像として「理解」していたなら、内容も理解しているはず。「写像」とは「対応の規則」だったのでは？つまり言葉の違いだけで同じことをいっているのだから、理解し直す必要はありません。

質問： 連続関数はなぜ定積分できるのですか。 お答え： という事実が証明されているから。

質問： 連続関数は必ず定積分できるということはどの時期に証明するのですか？

お答え： 証明は微分積分学第一の範囲を超えます。第 5 回にこの定理のステートメントと意味を説明します。

質問： $\int_0^x e^{-t^2} dt$ を初等関数でない、と言っていたが「 x の」をつけるべき。まあわかるでしょ、が余裕がなくなった生徒に対して難しいと感じさせる要因だと思います。 お答え： この式で動く変数は x だけだから、 x の関数以外の何者でもない。「 $F(x) =$ 」と板書したので、「まあわかる」でなく「自明」のつもり。ちなみに生徒ではなく学生。

質問： $y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ って黒板に書いてありましたが、 γ って 2 ですか？ お答え： そう。

質問： 今のところ微積の授業は紙の上のあれこれですが、何に生かすのでしょうか。純粹に気になります。

お答え： 前期が半分すぎたところでこの質問は間抜けだと思います。「微積分」は「掛算九九」と同等の知識です。

質問： 初等関数や双曲線関数を今後どう使っていくのかわかりません。

お答え： 使う前に知っているべきだというわけですから、使う場面はあとからどんどんでてくるはず。

質問： $\sec x, \csc, \cot x$ はどういう時に使いますか？ 逆三角関数、双曲線函数などの使い方もあまりよくわかりませんでした... お答え： そうですか。質問です。 $\cos x, \tan x$ はどういうときに使いますか。 $\log x$ は？

質問： 講義ノート p7 の上から 4 行目の「正接の 4 倍角の公式」とは何ですか。 お答え： 言葉の通り。「正接の 2 倍角の公式」は $\tan 2x$ を $\tan x$ で表す公式。ここでは $\tan 4x$ を $\tan x$ で表す公式のこと。すぐに作れますね。

質問： 初等関数の定義が曖昧だった/ 結局初等関数とは何かよくわからない/ 初等関数とは お答え： 講義ノート p. 8.

質問： 講義ノート 2 ページ目の「像」と「値域」の使い分けがわからない。 お答え： 例 1.3 を見よ。

質問： 資料後半の問題は宿題ですか？ お答え： 少なくとも目を通しておくのは必須。

質問： 教科書は持ってくる必要はありますか？ 今日ってプリント使いましたか？ お答え： 前半：No, 後半：Yes.

質問： 正割などの上手い覚え方を知りたい。一気にやるのが多すぎて覚えられません。今のところ実用性が感じられない。 お答え： 覚え方は多分に個人的なもの。山田は「体で」覚えるのが好きです。実用性は必須ですか？

質問： $\cot x, \sec x, \csc x$ の微分積分の結果は暗記した方がいいですか/ 正割・余割などは知っていますが、それらの微分公式まで覚える必要はあるのでしょうか。正弦、余弦で表せば済むと思いますが。

お答え： どうぞご自由に。暗記しなくても暗算で答えを出せる人もいますし、暗記が必要な人もいます。

質問： $\int \tan x dx = \frac{1}{1+x^2} + C$ 以外に覚えた方がよいものはありますか。

お答え： ご質問の式は間違い。 $\tan x$ の原始関数は（定数をのぞいて） $-\log |\cos x|$ です（講義ノート 5 ページ）。

質問： $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 等の公式は今のうちに全て覚える必要はあるのでしょうか？

お答え： 必要となしに何らかの方法でてくれれば何でもよいですが、ご質問の式が間違っています。

- 質問： 高等関数は3類ではいつ習うのでしょうか？ お答え：「高等関数」という数学用語はありません。
- 質問： 何が立体で何が斜体なのか詳しく知りたい。 お答え：実際にテキストや講義資料をよく見るとわかる。
- 質問： 立体と斜体の違いは何ですか。 お答え：フォント。
- 質問： $f(x)^{-1} = \log x$ (\log は立体, x は斜体) と表記されていたが、立体と斜体がなんのことがよく分からなかった。
- お答え： $f(x)^{-1}$ は $f^{-1}(x)$ 。 “ $\log x$ ” の立体と斜体の区別はできますか。“ $\log x$ ”, “ $\log x$ ”, “ $\log x$ ” とは書かない。
- 質問： 立体と斜体の違いは何ですか (調べればわかる話ですが...) また、書き分けられるようにするべきですか？
- お答え： 手書きでかき分ける必要はないと思います。ワードプロセッサなどで印刷物を作るときは気をつけるべきです。
- 質問： $\sinh x$ と $\tanh x$ のおもしろい言い方を知りたいです。 お答え：口頭で説明します。
- 質問： 解答が $\sin x + \frac{1}{\cos x}$ のような形になったときは、 $\sin x + \sec x$ と書き換えるべきかどうか。
- お答え： 合っていればよい。どちらでも書けるのは必須。山田の試験では、特別な書き方が必要なときは指示する。
- 質問： 試験の答案に「函数」と「関数」のいずれを用いてもよいですか？ お答え：可だが、統一しないと格好悪い。
- 質問： $f(x) = \tan^{-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ は公式？ お答え：公式
- 質問： $f(x) = \tan^{-1}$ のとき $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ となり、 $\frac{1}{1+x^2}$ の原始関数が $\tan^{-1} x$ となることは覚えると言っていましたが、実際に $\int \frac{1}{1+x^2} dx$ の計算問題が出てきたら、計算過程をとばして $\tan^{-1} x$ と答えてよいのですか？ 良いのであれば、他に過程の省略が許されている原始関数を教えて下さい。 お答え：こんなものはルールではありません。答えがあていば全く ok です。(ちなみに、 $1/(1+x^2)$ の原始関数を求めるのに途中の過程ってなに?)
- 質問： 問題を解いて持参すれば添削または答案を貰うことはできるのでしょうか？
- お答え： 時間があればやります。「答案」はあなたが作るものであって山田がつくるものではありません。
- 質問： 試験は日本語の単語が分からないとき、英語でその単語を書いてもいいですか (全部の答えを英語で書いてもいいですか) (もっとも英語が分からない時は日本語で答えます)。 お答え：日本語・英語どちらでも結構です。
- 質問： $(\tan x)' = 1 + \tan^2 x$ の部分がいまいまいちわかりませんでした/ $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ となる理由がイマイチわかりませんでした/ 立体と斜体の違いがいまいちわからなかった。 お答え：「いまいち」は「求めている状態に少し足りないさま」。あなたがどこまでわかっているのかを明示していただけないとお答えできません。
- 質問： $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$ が分からない。
- 質問： $\sec x$, $\csc x$, $\cot x$ 等がよくわからなかったです。 お答え：そうですか (としか言いようがない)。
- 質問： 授業中の板書は授業プリントの内容に補足していくような感じですか予習するなら OCW-i に載せられた授業プリントと、教科書のどちらで行った方がよいですか。 お答え：前半：そうなると思います。後半：講義ノート
- 質問： 教授はなぜとても楽しそうに授業をするんですか？ 講義中に「変態」という単語を多用するようになったのはなぜですか？ お答え：前半：サービス。後半：印象が残りやすい。
- 質問： $\tan x \rightarrow x$ となっているのはなぜ？ お答え：文脈がわからないのでお答えできません。
- 質問： \sin , \cos , \tan と \sinh , \cosh , \tanh の違いはなんですか？ お答え：定義が全く違う。
- 質問： $\frac{d}{dx} \sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx} \cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ の証明はどのようにするんですか。 お答え：式が違ってきます。
- 質問： 教科書では「関数」ではなく「函数」と書いてありました。講義ノートでも注釈でそのように書いてありました。なぜ、「函数」と書くのかを少し詳しく知りたいです/ 関数 \leftrightarrow 函数の違いは？ お答え：講義の最初に説明したが、
- 質問： 中間値の定理って何ですか？ お答え：高等学校の教科書を調べよ。
- 質問： 他動詞って何ですか。 お答え：目的語を取る動詞。高等学校の英文法では習いませんか？
- 質問： 期末テストはなぜ一限なのですか？ (切実) お答え：「ご意見」の欄に回答しました。
- 質問： この授業は単位を取るのが難しいですか？ お答え：人によります。
- 質問： だいたいわかりました。 お答え：そう？
- 質問： そんなに種類増やしていいことあるの？ お答え：なんの種類？ランチメニュー？
- 質問： 又曲線を恥ずかしい、と授業ではいったものの実際は恥ずかしいとは思っていないのでは？ お答え：なるほど。
- 質問： 今日の講義 (ママ) の内容は誰がどのような経緯で発見したのか。 お答え：漢字「講義」は講義で説明した。
- 質問： 授業ノートをもっていなかったので、双曲線関数以降についてわからなかった。 お答え：遅刻しない方がよい。
- 質問： 板書がとてもきれいだったのですが、きれいに字を書くコツはありますか？ お答え：愛 w
- 質問： xy 座標を書いたとき原点がなかった。 お答え：黒板に書く図は「略式」です。気にしないで。
- 質問： 初めの説明をパワーポイントで行う必要はあったのですか？ お答え：パワーポイントは使っていません。
- 質問： 先生はサスペンダー派ですか？ お答え：そんな派閥があるんですか？ 知りませんでした。
- 質問： プロジェクタは間違っていない。間違っているのは先生の操作です。 お答え：そのはずなんですが。