

微分積分学第一講義資料 3

前回の補足

三角関数と双曲線関数 三角関数と双曲線関数の類似についての質問が複数ありましたので、実はそれらは定義域を複素数まで拡張すると本質的に同じものだという説明を(一応)しておきます。いまは、あまり気にしなくてもよいと思います。

指数関数 $f(x) = e^x$ は次のように無限級数を用いて表される：

$$(3.1) \quad f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n.$$

このことは

- (3.1) の右辺が任意の実数 x に対して収束すること(べき級数の収束半径に関すること),
- (3.1) の右辺のような形の級数(べき級数)の微分は「多項式と同様」に計算できること(項別微分定理),
- $f'(x) = f(x)$, $f(0) = 1$ をみたく関数 f はただひとつであること(常微分方程式の初期値問題の解の一意性)

から導くことができる。これらの事実は「微分積分学第二」で紹介する。

同様に、任意の実数 x に対して

$$(3.2) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

$$(3.3) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

が成り立つ。

実は級数 (3.1) は任意の複素数 x に対して収束するので、

- 指数関数 $f(x) = e^x$ は式 (3.1) によって任意の複素数 x に対して定義される。

とくに $x = it$ (t は実数) とおくと、

$$\begin{aligned} e^{it} &= 1 + it + \frac{(it)^2}{2!} + \frac{(it)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots\right) + i \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \cos t + i \sin t \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで

- (3.1) のような形の級数の和は，項を並べる順序に無関係に定まる（絶対収束級数の順序変更；実は自明ではない）

という事実を用いた．

さらに，指数法則 $e^{x+y} = e^x e^y$ が任意の複素数 x, y に対して成立する（このことは「一致の定理」を用いて示すことができる）が，それを用いれば，一般の複素数 $x = s + it$ (s, t は実数) に対して

$$e^{s+it} = e^s (\cos t + i \sin t)$$

となることがわかる．

これらの関係式を用いると，

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \cosh(ix), & \sin x &= \frac{-i}{2}(e^{ix} - e^{-ix}) = -i \sinh(ix) \\ \cosh x &= \cos(ix), & \sinh x &= -i \sin(ix) \end{aligned}$$

が成り立つことがわかる．このことが双曲線関数と三角関数の「類似」の背景にある．

自然対数の底 自然対数の底 e の定義に関する質問がありましたので，これも一応まとめておきます．

- 実数の数列 $\{a_n\}$ が単調増加 ($a_1 < a_2 < \dots$) かつ上に有界 (次のような M をとることができる：すべての n に対して $a_n \leq M$) ならば， $\{a_n\}$ はある実数に収束する (実数の連続性公理)．
- 式

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ は単調増加かつ上に有界である．

これらの事実を用いて

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

と定義する．

実数の連続性公理は「微分積分学第二」で扱う．

前回までの訂正

- 講義資料 10 ページ 12 行目：「 $N \geq 2 \times 10^{100} - \frac{3}{4}$ が十分である」 \Rightarrow 「 $N \geq 2 \times 10^{100} - \frac{3}{2}$ が十分である」(嘘ではないが)
- 講義資料 2, 3 ページ下から 12 行目：「(3) 日本の」 \Rightarrow 「(3) 2本の」