2015 年 6 月 23 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 4

前回までの訂正

- 講義ノート 12 ページ，問題 1-10 (1) ：$1/(x+a)^2 \Rightarrow 1/(x-a)^2$
- 講義ノート 17 ページ，14 行目：「みなすせる」⇒「みなせる」
- 講義ノート 18 ページ，12 行目：f_{xx}, $f_{xy} = f_{yx}$, f_{yy} の右辺の分母「x^2+y^2」⇒「$(x^2+y^2)^2$」
- 講義ノート，解答とヒント，問題 1-1: (3) を削除．(4), (5), (6) の番号を 1 減らす．
- 講義資料 2，1 ページ，8 行目：「情報をを」⇒ 「情報を」
- 講義資料 3，2 ページ，13 行目：「実数のる」⇒ 「実数の」
- 提示資料 2 (6 月 16 日分) 9 ページ一番下：「九九を覚える」のあとにピリオド「.」を追加.
- 提示資料 3 (6 月 19 日分) 6 ページ 4 行目：

$$e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\sin x) \qquad \Rightarrow \qquad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

授業に関する御意見

- 調和関数ちょうわかりやすい　**山田のコメント：** はいはい.
- ／＾ｏ＾＼フッジサーン　**山田のコメント：** 噴火するの?
- 滑り芸が面白い.　**山田のコメント：** そりゃキャリア 30 年ですからね.
- 先生とても面白いです！/ 先生おもしろいです.　**山田のコメント：** そう?
- 「変態」という言葉の先生による使われ方になれることができません.　**山田のコメント：** そうですか.
- 数学的には「増える」より「大きくなる」を多用したほうがわかりやすいです.　**山田のコメント：** なるほど，なぜでしょうね．英語では increase ですが.
- 少し漢字がよみづらいです/ 字がさらに汚くなっています．改善してください/ 時々黒板にかいてあるものがよめない. . . / 英語をもう少しだけ読みやすく書いて欲しいです.
  山田のコメント： Sorry
- ときどき資料も用いて説明してくださったら，資料を参考しながらもっと理解しやすくなると思います.　**山田のコメント：** 了解．とりあえず一度講義の前に読んでおいてくださいね.
- わかりやすくおもしろい話をしてくれるとありがたいです.　**山田のコメント：** あなたにとってわかりやすくおもしろい話をするには，あなたの情報を詳細に知る必要があります.
- スライドは真ん中使って下さい/ スクリーンが逆側で見えにくかったので真ん中にうつしてほしいです.　**山田のコメント：** 黒板との併用が難しいですけどどうしましょう.
- 黒板の，受講者から見て右上に「1」などと数字があるので黒板がみやすいです/ 黒板の右上に数字を書いてもらえて見やすい.　**山田のコメント：** ですよね.
- 声が大きくて素晴らしいと思います.　**山田のコメント：** Thanks.
- 前回の授業はショックだったが（演習の問題はやばかった）今回は随分やさしく感じました．よかったです.　**山田のコメント：** それはどうも.
- わかりやすかったです/ 今日はわかりやすかったので現状維持が良いです.　**山田のコメント：** それは困った.
- “領域”，“よく使われる状況” など今回の講義は不透明なものが多く，第 3 回に期待しています.
  山田のコメント： 実際に分かりにくい状況なんですよ．あまり気にしない方がよいかもしれません.
- プリントを前に置くのは面白いと思いました.　**山田のコメント：** すみません.
- 授業開始前のプリント配布は一番前の一箇所だと効率が悪いので後ろにも置いてください．授業開始後は一番前だけにしていただいていいですから.
  山田のコメント： それを，みなさんで運用していただけませんか?
- 講義資料を後ろに置けば，授業が中断されることはないですし，学生もいちいち前へいって取りに行かなくてもいいので，資料は一番後ろに並べて欲しいです.
  山田のコメント： それじゃ遅刻し放題?
- 遅刻してきた人をいじるのが面白かった.　**山田のコメント：** 楽しみが少ないもので.
- 遅刻したときに前に紙をとりに行くのはやめた方がいいですかね。？　**山田のコメント：** 取りに来て下さい．ついでに挨拶も．ところで “。” と “？” は併用しません.
- 練習問題の解答がもう少し詳しく書いてあるとありがたいです．/講義プリントの問題の答えをもっと詳しくかいていただけるとありがたいです.
  山田のコメント： 具体的にはどの問題をどのくらい? 質問に書いてみましょう.
- 問題のノートの問題の答えはどこかに乗っていますか? （原文ママ）　**山田のコメント：** もうみつけた人がいます．ちなみに「載っていますか」ですね.
- 「目に見えないことを計算で解き明かすのが数学だ」という教授の言葉を聞いて「数学ってすごいなぁ」と思った
- 「3 変数以上こそ数学を使って考える」という考え方が心に響いた．微積をするときのモチベーションが上がりました.
  山田のコメント： そうなんですがね.
- シャンプー変えました?　**山田のコメント：** いいえ.
- 教授はシャンプーは何を使っていますか? ちなみに僕は弱酸性のメリットです.　**山田のコメント：** いわゆる石鹸シャンプー.
- ~~英語の発音が~~（山田注：書きかけて消してあった）　**山田のコメント：** わるい?
- 非常に興味深かったです.　**山田のコメント：** はい
- なし/特になし/なし　**山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 多変数関数の逆関数は定義できますか?

お答え： 一般に定義できません．$f(x,y)$ の等高線が一般には曲線になる，ということから数 z をひとつ決めても $z=f(x,y)$ となる (x,y) はただ一つには定まりません．2 つの 2 変数関数の組が与えられると，逆に解くことができそうな気がします（第 4 回).

質問： 2 変数関数の微分までは分かりましたが，3 変数が分からなかったです.

お答え： 講義ノート 19 ページ（一般の n 変数関数）ではだめ？

質問： 地球を平面として考えたときに，2 変数関数として標高，気圧などを表現できるのはわかったが，球形にしてやるとどうなるんですか? 何変数でどんなことになるんですか.

お答え： 地球を考えましょう．（緯度・経度）を指定すると地球の 1 点が指定されますから，地球上の点と座標平面上のある領域の点は 1 対 1 に対応します．（というのは嘘．地球全体ではそんなことはできないが，たとえば日本の近くに限れば，平面上の領域と 1 対 1 に対応します．この対応を地図と言います．すると「標高」はこの地図上の点（平面の領域上の点）に対して数を与える対応なので 2 変数関数とみなせます．緯度・経度で地図を与えると，日付変更線のあたりと，北極・南極の近くでまずいことがおきますが，そのときは地図の作り方を変えればやはり考えている地点の近くでは平面の領域との 1 対 1 対応があります．このように，考えている世界の各点の近くで平面上に「地図」がかけるような世界を数学では「2 次元多様体」と言いますが，これ以上深入りはしません.

質問： 講義ノート 14 頁の「関数 f が “性質のよい” もの」というのは「関数 f が連続である」こととどう違うのでしょうか.

お答え： せめて微分可能性くらいは仮定したい．ここで想定しているのは C^∞-級くらい，あるいは C^1-級（第 3 回参照)．この定義が煩雑で，グラフを説明する前にこの概念を説明し始めるとむしろ理解の妨げになる，という判断で後ろにまわしています．いずれにせよこの授業では「なめらかな曲面」をきちんと定義することはしませんので，大雑把に考えて頂ければ結構です.

質問： よい性質をもつ関数ならばグラフは曲面になるとあったが，この「よい性質」というものの定義はどのようなものになっているのか．/（前略）「性質のよい」とはどういう意味ですか. **お答え：**C^∞-級．第 3 回.

質問： 講議ノートより，性質のよい関数とはどういうことですか?

お答え： 第 1 回講義，講義資料 2 で「講義」という漢字の指摘をしましたが聞いたり読んだりしていないんですかね.

質問： たちの悪い関数って何ですか? **お答え：**どの文脈で?

質問： “たちの良い関数” かどうかは簡単に見分けられるものなのですか.

お答え： C^1-級ということなら簡単に判断できる．第 3 回.

質問： $f(x,y)=x^2-y^2$ に限らず定義域が $\{(x,y)|f(x,y)=1\}$ の関数ならば（原文ママ：集合のことか)「高さ 1 の等高線」と呼ぶのですか? （$f(x,y)=x^2+y^2$, $\{(x,y)|f(x,y)=1\}$ も「高さ 1 の等高線」と呼ぶのですか?）

お答え： 「関数 f の高さ 1 の等高線」といいます.

質問： 関数 f のグラフの等高線（原文ママ：グラフの等高線とは言わない）は好きな高さで引いても良いのですか.

お答え： 調べたい高さで引くのがよいでしょう.

質問： 2 変数関数 $f\colon D\to\mathbb{R}$ と定数 c に対して $\{(x,y)\in D\,|\,f(x,y)=c\}$ は等高線とも等高面ともいえるのですか.

お答え： 2 変数では等高線というのが普通．3 変数関数では，等高面というのが普通です.

質問： 等高線というのはある地点の標高がその地点の位置 (x,y) により表わされているときに，同じ標高をもつ (x,y) の組の集合という解釈でいいですか?

お答え： 一般の関数で考えていますか? それなら「標高」とは言い切れません．解釈ではなく定義をまず見て下さい.

質問： 地図，気圧の等高線は互いに交わることはありませんが，等高線が交わるような多変数関数は存在しますか.

お答え： $f(x,y)=x^2-y^2$ の高さ 0 の等高線が交わることは講義で見た．一般に，地図の等高線も交わることがあります.（違う高さの等高線は交わりません).

質問： 等高線の考えは，グラフを書くということと同じなのか?

お答え： グラフと等高線は定義が違いますが，どうして同じと思うのですか?

質問： 等高線の考え方は増減を考えているのと何が違うのですか.

お答え： どこが共通なのでしょう．それ以前に「等高線の考え方」とはなんでしょう．等高線の定義は分かりますが，その「考え方」がどんなものを指しているかがわかりません.

質問： 講義ノート 13 頁脚注 2 の「変な部分集合」とは具体的にはどのようなものですか?

お答え： たとえば $\{(x,y)|x$ は無理数 $\}$.

質問： 構義ノート（原文ママ：講義ノートのことか）の例 3.4 について，「$f(x)=\sqrt[3]{x}$ で与えられる関数 f は 0 で微分可能ではないが，f のグラフはなめらかな曲線である」と書かれている．様々な文献にも，なめらかなグラフは微分可能と書かれているが，そもそもなめらかな曲線とは正確にどのような曲線なのでしょうか.

お答え： 「なめらかなグラフを持つ関数は微分可能」ということ? 文献を具体的に教えていただけませんか? 「微分可能な関数のグラフはなめらかな曲線」なら正しいのですが.「なめらかな曲線」の定義は一般には難しいですが，曲線のなめらかさは「座標系とは関係ない」性質のはずです．微分可能な関数 x^3 のグラフ $y=x^3$ はきっとなめらかな曲線でしょう．グラフ $y=\sqrt[3]{x}$ は x^3 のグラフと合同だから，なめらかな曲線である，ということです.

質問： 2 変数関数において，片方を固定して微分する偏微分における数学的な意味はありますか．1 変数関数の場合は，グラフの傾きを求めるというイメージがあり分かりやすかったですが，今回の偏微分はどのような働きをするのか分かりにくいです．

お答え： 1 変数関数の $f(x)$ の微分係数は，x を変化させたときの $f(x)$ の変化率，というのが（高等学校でならった）微分のもともとの意味．グラフの（接線の）傾きはそれから導出される副次的な意味です．関数 f の x に関する偏微分は x を動かした時の f の変化率．グラフのイメージは当面わすれていても問題ありません．

質問： ある関数 $f(x,y,z)$ を x, y の両方について微分したいとき $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z)$ もしくは $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y,z)$ と表し，1 文字ずつ微分していけばいいですか?

お答え： 「x と y の両方について微分」というのは，$\partial^2 f/(\partial x\partial y)$ のことですか? それならおっしゃるとおりです．

質問： 多変数関数が連続でなくても偏微分できますか?

お答え： 問題 2-6．この関数は原点で連続でないが，偏微分は可能（例 3.8 参照）．

質問： 多変数関数の極限を考える場合，たとえば変数 x, y の両方を無限大へとばした場合と，x をとばしてから y をとばした場合に値が変わることがありますか．

お答え： あります．問題 2-9 はその例です．

質問： y が x に従属のとき $f(x,y)$ は x で偏微分できますか?

お答え： この場合は偏微分とはいいません．たとえば $f(x,y)=x^2-y^2$, $y=\sin x$ としましょう．すると $f(x,y)=f(x,\sin x)=x^2-\sin^2 x$ でこれは x の 1 変数関数です．

質問： 偏微分の順序交換ができない関数は何がありますか．

お答え： 問題 2-9．

質問： $f_{xy}\neq f_{yx}$ となる関数の具体的な例をさらに教えて下さい．

お答え： 問題 2-9 の他にということ?

質問： f_{xy} と f_{yx} がほとんどの場合で一致している理由はなんですか．また一致しないのはどんなときですか．

お答え： 前半：講義ノート 31 ページ，定理 3.18．成立する理由は 36 ページの証明．後半：問題 2-9．

質問： $f_{xy}=f_{yx}$ が成り立つ理由を知りたいです．

お答え： 講義ノート 36 ページ．

質問： 数学の講義では $f_{xy}\neq f_{yx}$ となってしまうたちの悪い関数はよく出て来るんですか?

お答え： この授業ではほとんど出てきません．むしろ，$f_{xy}\neq f_{yx}$ となるのは「例外的」と思っていただいた方がよいです．

質問： $f_{xy}=f_{yx}$ なら $f_{xyz}=f_{yzx}=f_{zxy}=f_{xzy}=f_{yxz}=f_{zxy}$ となるのですか?

お答え： はい．$g=f_x$ にたいして偏微分の順序交換定理を適用すれば $f_{xyz}=g_{yz}=g_{zy}=f_{xzy}$．なお $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$ ですね．

質問： ふつう $f_{xy}=f_{yx}$ なのであれば，ふつう $f_{x_1x_2\dots x_n}=f_{x_2x_1x_3\dots x_n}=f_{x_i\dots x_j}$ $(i,j\in\mathbb{R})$ となりますか?

お答え： $i,j\in\mathbb{R}$ は変じゃありませんか? たとえば $i=e$, $j=\pi$ のときはどう考えるの?

質問： 偏微分の順序交換が成立しない例について．

お答え： 文が完結していません．

質問： 第 2 回 p19 の「多変数関数のへんどう関数」の説明の部分で「よくつかわれる状況」と書いてありますが，そのひと言が見落としやすく，全ての関数において $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\partial x_l}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_l\partial x_k}$ とかんちがいするひとがでるのではないかと思いました．（授業でていねいに教えてもらったので授業をきちんと受けているひとは理解できると思います!）

お答え： この授業の範囲では，むしろ交換できないような例は例外で，気にする必要はないかと思います．ところで，その勘違いを避けるためにはどのように修正すればよいと思いますか．

質問： ラウンド d の書き順って ∂ （山田注：したから上に）なんですね．

お答え： よく知らないんです．2 つの書き方を見たことがあります．

質問： 教授は $\frac{\partial f}{\partial x}$ の 「∂」を何と呼びますか? あるいは場合によって別の呼称と使い分けますか?

お答え： 山田は「ディー」と読んじゃいます，と講義では言いました．

質問： ∂ の読み方に「デル」を付け加えてもいいのではないかと思いました．

お答え： そうかもしれません．

質問： 偏微分のとき，1 変数の微分と同じように $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial f}}$ とできますか?

お答え： いいえ．第 4 回で詳説します．

質問： 1 変数関数で $\frac{\partial}{\partial x}f(x)$ や f_x と書いたらダメですか.

お答え： ダメではありません．ただし，文脈によっては「よくわかっていない人だな」と思われます.

質問： d や ∂ の扱い方がよく分かりません．たとえば $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ となるのはなぜですか．もし文字どおし（原文ママ）をすべて掛けたとしたら，$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}$ となると思います．逆に ∂x と ∂x を掛けて ∂x^2 になるんだとしたら，∂^2 とはどういうことを意味するのか分かりません．左辺のように長ったらしいから略してかくというだけなのでしょうか.

お答え： 高等学校で習った $\frac{d^2y}{dx^2}$ の記号は受け入れられますか? 本来なら $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$ と書くところですが，習慣的に $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と書くようです．いずれにせよ「掛け算」を意味しているわけではないので，「熟語」としてなれて下さい.

質問： $\frac{d^2}{dx^2}f(x)=0$ を満たすような 1 変数関数は調和関数ですか?

お答え： はい．ただ，そういう関数は 1 次関数と定数関数しかないので「1 次関数」と呼ぶことが多いと思います.

質問： $f(x,y)$ が調和函数であるならば，$f(x,y)$ はかならず x と y の対称式であるのか?

お答え： いいえ．反例：$x+3y$.

質問： Δg の記号は「デルタ」とまぎらわしくないですか.

お答え： 紛らわしいです．しかし文脈からわかる場合がほとんどです.

質問： ラプラシアン Δ とギリシア文字の大文字の Δ は同じ書き方で良いのか.　**お答え：**よいです.

質問： 調和函数であるか否か，2 次の偏導関数を計算せずに（直感的に）見分けることはできるようになりますか.

お答え： ならないと思います.

質問： 調和関数はどう定義されますか?　**お答え：**講義ノート 20 ページ.

質問： 調和関数は何のために定義されましたか，どのように使われますか?

質問： $\Delta g(=g_{xx}+g_{yy})$ をいつ使うのか，用途がわからなかった.

質問： ラプラシアンはどんな場面で便利ですか？

お答え： 掛け算九九と同じ.

質問： f が調和関数であれば何がわかるのでしょうか.

質問： 調和関数になる関数は $\Delta g=0$ 以外に性質はありますか.

お答え： たとえば (1) 調和関数に関する平均値の定理が成り立つ（ググってみよう）; (2) 2 変数なら $z=x+iy$ の正則関数でその実部が f になるものが局所的に存在する（今は暗号と思って良い）などなどなどなど．この講義では，偏微分の計算練習をするために「調和関数」という由緒ただしそうなものを例としてもってきただけ.

質問： $\Delta g=0$ となる関数を調和関数とわざわざ名付ける理由は何ですか.

お答え： さまざまな場面で現れるので，名前をつけた方が便利.

質問： $f_{xxx}+f_{yyy}=0$ を満たす 2 変数関数 $f(x,y)$ には特別な呼び方があるのですか.

お答え： ないと思います．山田が知らないだけかもしれません.

質問： 協和関数ってなぜたちがいいんですか?　**お答え：**協和関数ってなんですか?

質問： 最後の調和函数の一般化のとき，前の $g(x,y)=\tan^{-1}\frac{y}{x}$ と同じ記号 g を使うのは誤解をまねく表現であると感じました.　**お答え：**なるほど．この場合はどうするとよいでしょう.

質問： 偏微分して得た結果で原始関数を求めるとき, 定数とみなされ, 微分したあと 0 になった項はどうやって確定するか．たとえば $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-12xy$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-6x^2+5y^4$ をそれぞれ積分すると，$f(x,y)=x^3-6x^2y+c_1$ と $f(x,y)=-6x^2y+y^5+c_2$ となるから，この場合直接 $c_1=y^5$, $c_2=x^3$ と考えても大丈夫でしょうか.

お答え： 多変数関数では原始関数は考えませんが, この状況で考えてみましょう．問:$f_x=3x^2-12xy$, $f_y=-6x^2+5y^4$ を満たす関数 f を求めよ．答：第 1 式から $f=x^3-6x^2y+g(y)$，すなわち「x で微分して ...となる」という情報から y だけで表される関数は抜け落ちますので「積分定数」に相当するところが y だけの任意の関数となります．この結果を y で微分すると第 2 式から $-6x^2+g'(y)=-6x^2+5y^4$．したがって $g(y)=y^5+C$ (C は定数)．すなわち $f(x,y)=x^3-6x^2y+5y^4+C$ (C は定数).

質問： $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=f_x$ を x で積分するときに $\int\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx$ で良いですか.

お答え： x で積分するならこの記号で大丈夫．多変数関数の積分は第 5 回.

質問： 2 変数関数で考えると，x, y のあるベクトルで増加する方向は逆のベクトルで考えると x, y が減少する方向だから（原文ママ：x, y が減少するのではなく $f(x,y)$ が減少する）増減を考えることに意味がないとのことだが，それは一次元でも同じことが言えてしまうのでは?

お答え： そう．でも数直線上ではひとつの向きを「標準的な方向」と選ぶことができる，と講義で説明しました．平面

上では，向きがたくさんあって，標準的な方向を決めることができない．

質問： 問題 1-1 の (2) がなぜ No. なのかわかりません．$x = y^4$ ってことは $x \geqq 0$ だから $y = \sqrt[4]{x}$ で x を決めれば y はただ 1 つに決まるから関数といえるということにはならないんですか?

お答え： ならないんです．$x > 0$ なら 4 乗して x になる実数は 2 つあり，問題文ではそのどちらを選ぶかという条件がありません．「負でない実数 x に対して，4 乗して x になる <u>負でない</u> 実数 y を対応させる」なら関数になります．

質問： $\int \frac{1}{1+x^4}dx$ をどのようにして求めたらよいのか分からない．

お答え： $1 + x^4 = (1 + x^2)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$ と因数分解したうえで，部分分数分解

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

する．

質問： $\in$ と $\subset$ は使い方にどんな違いがありますか?

お答え： 意味に違いがあります．$x \in A$ は，対象 x が集合 A の要素 element, member である，という意味．集合は「対象の集まり」で，それを構成するひとつひとつの対象が要素です．$3 \in \mathbb{R}$, $i \not\in \mathbb{R}$. 一方 $B \subset A$ は集合 B が集合 A の部分集合 subset であるという意味．B も集合で，B の要素がすべて A の要素になっていることを表します．たとえば $(0, 1) \subset \mathbb{R}$ (開区間)，$\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ (2 つの要素の集まり)，$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$, $\emptyset \subset \mathbb{R}$ (空集合は任意の集合の部分集合だと約束する)，$\{1\} \subset \mathbb{R}$ (一つの要素をもつ集合) ですが $1 \subset \mathbb{R}$ ではありません．

質問： 記号 “$\in$” について，Element の E が由来になっているとおっしゃいましたが，それならば記号 “$\in$” は “$\ni$” の向きよりも “$\in$” この向きで用いたほうが行儀が良いのでしょうか?

お答え： どちらの向きでも使うようです．由来は由来として，もう記号が独立に意味をもってしまった例ですね．足し算の記号 $+$ なども記号の由来はあまり知られていないかも．

質問： $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ というものと $\{(x_1, x_2)\} \subset \mathbb{R}^2$ というものの意味の違いはなんですか? どちらも x_1, x_2 が実数であるという意味に思えます．

お答え： 前者：「x_1，x_2 は $\mathbb{R}$ の要素である」すなわち「x_1, x_2 は実数」．後者：「ペア (x_1, x_2) ひと組からなる集合 $\{(x_1, x_2)\}$ は $\mathbb{R}^2$ の部分集合である」たしかに後者も前者と同じことを言っているようですがまわりくどいですね．このフレーズを使うときは，各々の x_1, x_2 に対して，という文脈が多いと思います．なので，後者のように書くのでも，わざわざ集合にせず $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ と書くのがよいかと思います．

質問： 例えば 5 回 x で偏微分するとき，f_{xxxxx} と書いても良いのですか?

お答え： よいです．数え間違いを避けるためには $(\partial^5 f)/(\partial x)^5$ と書いた方が親切かもしれませんが.

質問： 正の無限大を表すときに「$+\infty$」と書くが「∞」ではいけないのだろうか? いけないとしたら何故?

お答え： 実数の文脈では ok です．複素数の「無限大」(複素平面の無限遠点；普通は 1 つと考える）がでてくる文脈では，実数の正の無限大であることを強調して $+\infty$ と書く必要がある場面がある（がこの講義ではない).

質問： 講義の中で定義と定理の違いについて理解しましたが，原理についても説明してほしいです．

お答え： 文脈がわかりませんが，講義ノート 26 ページの「はさみうちの原理」でしょうか．この文脈についてのみ説明しますと，脚注 3 に英訳 The squeeze theorem とあるように「定理」の意味です．広い意味の「定理」についてはその立場によって「命題」「補題」「公式」などの呼び方があります．そのうちの一つと思って下さい．

質問： xyz 座標を書くときに右手系を推奨されていましたが，なぜなのでしょうか?

お答え： 数学や物理学のほとんどの分野で右手系を使うことが前提となっているからです．フレミングの法則などを外積（ベクトル積）を用いて表すとき，もし「左手系」をつかうと右手と左手が逆になり，右手系を使う人と話が通じなくなります．

質問： 右手系と左手系の違いは何ですか．

お答え： 右手の親指，人差し指，中指を互いに直交するように開いたとき，x, y, z 軸の正の向きがそれぞれ親指，人差し指，中指の向きを向いている空間の直交座標系を右手系，左手で同じ状況となるのが左手系．右手系は回転によって左手系に重ね合わせることはできない．

質問： $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ は定義なのですか，それとも導かれたものですか．

お答え： 両方の立場がある，という話を講義でしましたね．

質問： $e^0 = 1$ と「定める」という言い方を授業中にしていましたが $0! = 1$ は「定める」と「である」どちらで表現すればよいのでしょうか?

お答え： 階乗の定義をどうするかによると思います．「正の整数 n に対して $n! = n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$ と定める」と定

義したのであれば，この定義に 0! は含まれませんので，「別に $0! = 1$ と定める」とすべきでしょう．

質問： e の定義の一つに $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ というのがありましたが，$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ ではなくて，数列である n を用いるのはどのような理由があるのでしょうか．(1) x を使わずに n を使うのは数学的な意味がある（「数列である」ことに意味がある etc.　(2) 昔のひとがそう決めたから．(3) その他

お答え： (1)．このような「極限」を用いて e を定義するには，これらの極限値が存在することを示す必要があります．数列の極限であれば，「上に有界な単調増加数列は収束する」という実数の性質（微分積分学第二で扱う）を用いて収束することが言えるのですが，連続変数の場合はもう少しステップが必要で，数列の極限の存在から連続変数での極限の存在を示す，という道筋が普通のようです．すなわち，論理的な道筋の最初のポイントに置くなら数列の方がシンプルということです．

質問： 多変数関数においての d/dx の意味をもっと知りたかった．

質問： 偏微分の説明で板書された「3 変数の文脈で $\frac{d}{dt}$ とあったら特別な意味」の特別な意味とは何ですか．

お答え： この講義では扱いません．流体力学の文脈のキーワード「オイラー微分」を調べてご覧なさい．

質問： 900hPa はちょっと息苦しいだけではなく（超）大型台風が来たときなので身の安全を確保すべきだと思います．

お答え： そうですね．

質問： 1-15 の問題，授業で解説した，地球にゴムをかける問題で，図の $\angle ABO$（図省略．中心 O，持ち上げたゴムと球面の接点を B，ゴムをつまんだ点を A としている）が直角になる理由を教えて下さい．

お答え： 円の半径と接線は直交する．中学校で習いましたね．

質問： 多変数関数が全くイメージできません．3 次元までは空間を動くイメージがつくのですが...

お答え： で？イメージする必要はありますか?

質問： 3 変数関数 $f(x,y,z)$ をグラフに書くことはできるのでしょうか．

お答え： グラフは一般の n 変数関数に対して定義できます．講義ノート 14 ページ参照．「グラフに書く」という言葉の意味がわからないのでご質問には直接お答えはできません．

質問： 多変数関数における偏微分はグラフにおいて何を示すのですか．（一変数関数の微分は傾きを示すように）

お答え： f_x は x を変化させたときの f の値の変化率．グラフにこだわる必要はない．

質問： $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ がグラフにおいてどのような意味をもつのか分かりません．

お答え： それでは $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$ はグラフにおいてどのような意味をもつでしょう．グラフにおける意味にこだわる理由はなんでしょう．

質問： $\mathbb{R}^n$ は n 次元空間という認識で良いですか?

お答え： 通常の数学語の意味では「$\mathbb{R}^n$ は n 次元空間」ですが，「n 次元空間には $\mathbb{R}^n$ 以外もある」ので，あなたの「認識」がどういう意味かによって答えが変わります．

質問： 先生は授業内で $\frac{df}{dx}$ を “ディーエフオーバーディーエックス” と読んでいました．高校では “ディーエフバイディーエックス” と読むと習った記憶があるのですが，それも間違いではないのでしょうか．

お答え： どちらも使います．分数の表記 a/b は「a が b の上にある」という見かけから “a over b” と読んだり，「a 割る b」という意味から “a by b” と読んだりするようです．

質問： 講義資料で使っている教科書は何を使っているのですか？講義資料の問題の解答が載っている場所のヒントを教えて下さい．

お答え： 「使っている」が重なっていますね．オリジナルです．解答はすでに見つけた人がいます．

質問： 質問はありません．新しい慨念（原文ママ：概念のことか）が増えて大変だなぁと思いました．

お答え： その分世界が広がりますね．