2015 年 6 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 5

お知らせ

- 授業評価アンケートにご協力お願いいたします．東工大ポータルから Course Evaluation を選んでください．
  - 回答率が低いと面白くないので，よろしくご協力ください．
  - 高い評価を下さいなんていうことは言いません．
  - 自由記述欄に面白いことを書いていただけると中の人が喜びます．
  - ご回答の集計は，山田のコメントをつけて公開いたします．
- 講義ノートの問題解答についてのご質問をいくつか受けました．すでに在処を見つけた方がいらっしゃいますので，情報交換をして下さい．

前回の補足

■積分の計算　講義ノートの問題 1-14 についてご質問があり，前回の講義で鍵となる因数分解を紹介しましたが，積分の計算を完成させてみましょう．問題は

$$\frac{1}{1+x^4}\qquad \text{の原始関数を求める}$$

でした．

因数分解

$$1+x^4 = 1+2x^2+x^4-\left(\sqrt{2}x\right)^2 = (1+\sqrt{2}x+x^2)(1-\sqrt{2}x+x^2).$$

部分分数分解　被積分関数は

(1) $$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{1+\sqrt{2}x+x^2}+\frac{cx+d}{1-\sqrt{2}x+x^2}\qquad (a,\, b,\, c,\, d \text{ は定数})$$

の形に部分分数分解できる．

式 (1) に $x=0$ を代入して

(2) $$1=b+d.$$

また (1) の両辺に x を掛けて $x\to\infty$ と極限をとると

(2) $$0=a+c.$$

さらに (1) に $x=\sqrt{2}$, $x=-\sqrt{2}$ を代入すると

(3) $$\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(\sqrt{2}a+b)+\sqrt{2}c+d,\qquad \frac{1}{5}=-\sqrt{2}a+b+\frac{1}{5}(-\sqrt{2}c+d).$$

これをといて

$$a = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \qquad c = \frac{-1}{2\sqrt{2}}, \qquad b = d = \frac{1}{2} \tag{4}$$

を得る．

したがって

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{2}x+2}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{-\sqrt{2}x+2}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right). \tag{5}$$

さらに変形　ここで

$$\log(1+\sqrt{2}x+x^2)' = \frac{2x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2}, \qquad \log(1-\sqrt{2}x+x^2)' = \frac{2x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}$$

の形を見ながら，被積分関数を次のように変形する．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^4} &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} - \frac{2x-2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\frac{2x+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} - \frac{2x-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\Big(\log(1+\sqrt{2}x+x^2)' - \log(1-\sqrt{2}x+x^2)'\Big) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\log\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)' + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right).
\end{aligned}$$

まだ変形　上の式の最後の 2 つの項は

$$\big(\tan^{-1}(ax+b)\big)' = \frac{a}{1+(ax+b)^2} \qquad (a \neq 0)$$

を見ながら次のように変形する：

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{2}x+x^2} &= \frac{1}{\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{2}{\left(\sqrt{2}x+1\right)^2+1} = \sqrt{2}\big(\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1)\big)' \\
\frac{1}{1-\sqrt{2}x+x^2} &= \frac{1}{\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{2\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+1} = \frac{2}{\left(\sqrt{2}x-1\right)^2+1} = \sqrt{2}\big(\tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)\big)'
\end{aligned}$$

結論　以上をまとめれば

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\log\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2}\right)' + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)\Big)'$$

なので

$$\int\frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log\frac{1+\sqrt{2}x+x^2}{1-\sqrt{2}x+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\tan^{-1}(\sqrt{2}x+1) + \tan^{-1}(\sqrt{2}x-1)\Big).$$