2015 年 6 月 30 日 (2015 年 6 月 30 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 6

お知らせ

- 授業評価へのご協力お願いいたします．6 月 28 日 23 時現在 4/114．目標 90/114．
- 次回 7 月 3 日に，中間試験の予告を行います．お誘い合わせの上ご出席ください．

前回の補足

■微分可能性について

- 一般に n 変数関数 $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ が $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ で微分可能であるとは，定数 A_1,... A_n をうまく選んで

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)$$
$$=A_1h_1+A_2h_2+\dots+A_nh_n+\sqrt{h_1^2+h_2^2+\dots+h_n^2}\,\varepsilon(h_1,h_2,\dots,h_n)$$

とおくとき $\displaystyle\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)}\varepsilon(h_1,\dots,h_n)=0$ が成り立つようにできることである．
- 上の f が $(a_1,\dots,a_n)$ で微分可能ならば，$A_1=f_{x_1}(a_1,\dots,a_n)$,..., $A_n=f_{x_n}(a_1,\dots,a_n)$ である．

■C^k-級について

- 2 変数関数 $f(x,y)$ が C^k-級（k は正の整数）とは，f の k 次偏導関数がすべて存在し，それらが連続であること．
- $f(x,y)$ が C^k-級（$k\geqq 2$）ならば f は C^{k-1}-級である．実際，f を C^k-級とすると，その k 次偏導関数は $k-1$ 次偏導関数の偏導関数だから，$k-1$ 次偏導関数が存在しなければならない．すなわち f の $k-1$ 次偏導関数はすべて存在．さらに f の一つの $k-1$ 次偏導関数 g をとると，g_x, g_y は f の k 次偏導関数．ここで f が C^k-級であることから g_x, g_y は連続である．したがって定理 3.16 より g は連続．すなわち f の $k-1$ 次偏導関数は連続．
- $f(x,y)$ が C^k-級ならば，$m\leqq k$ をみたす任意の正の整数 m に対して f は C^m-級である．このことは上の性質を繰り返し用いることによって示せる．
- $f(x,y)$ が C^k-級（$k\geqq 2$）ならば f_x, f_y はともに C^{k-1}-級である．実際，f_x の $k-1$ 次偏導関数は f の k 次偏導関数だから，f が C^k-級であることより連続である．
- $f(x,y)$ が C^3-級なら，f の 3 次偏導関数の微分の順序は任意に交換できる．とくにここでは $f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}$ を示そう．f は C^2-級でもあるから，定理 3.18 より $f_{xy}=f_{yx}$．これを x で微分して $f_{xyx}=f_{yxx}$．また，f_x は C^2-級だから，定理 3.18 より $(f_x)_{xy}=(f_x)_{yx}$．すなわち $f_{xxy}=f_{xyx}$．
- $f(x,y)$ が C^k-級ならば f の k 次以下の偏導関数の微分の順序は任意に交換できる．

前回までの訂正

- 黒板 3 枚目：「$\displaystyle\lim_{x\to a}g(x)=A$」の説明で「$x$ がどんなしかたで a に近づいても $f(x)$ は a に近づく」と書いたようです．「x がどんなしかたで a に近づいても $g(x)$ は A に近づく」です．
- 黒板の「連」が正しくかけていなかったというご指摘がありました．どう間違っていたのかわかりませんが．
- 6 月 23 日の提示資料 5 ページ：

$$\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\left(\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3&y_3\\x_1&y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3&y_3\\x_1&y_1\end{vmatrix},\right)\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=\left(\begin{vmatrix}x_2&y_2\\x_3&y_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_3&y_3\\x_1&y_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix},\right)$$

- 講義ノート 31 ページ，下から 11 行目：「k は正の正数」⇒「k は正の整数」

- 講義ノート・問題 2-7 の解答：順序交換ができる場合: $\frac{n(n-1)}{2}$ 通り ⇒ 順序交換ができる場合: $\frac{n(n+1)}{2}$ 通り；
- 講義ノート・問題 2-7 の解答：

$$f(x,y) = a(x^3-3xy^2)+b(y^3-3x^2y)+c(x^2-y^2)+dxy+px+qx+m$$
$$\Rightarrow \qquad f(x,y) = a(x^3-3xy^2)+b(y^3-3x^2y)+c(x^2-y^2)+dxy+px+qy+m$$

- 講義ノート 32 ページ，脚注 12：サイクロイドの脇の脚注番号 13 を削除．脚注 14 以降の番号を一つ減らす．

授業に関する御意見

- 教室が暑い　**山田のコメント：** 適当に調整してください．山田は動き回っているのでわからないです．
- 後半はねむかったです/あつくてねむかった．　**山田のコメント：** ざんねん．
- 金曜日は人がたくさん来て室温が上がり眠いです．エアコンの設定温度を下げたほうが起きれそうです．(-_-) zzz　**山田のコメント：** そうかもしれません．適当にやってください．
- 私は予習をしなければならないことが分かった．　**山田のコメント：** 講義ノートをざっと読んでおいてください．その程度でよいと思いますが．
- オススメの問題集教えてください/おすすめの問題集ありますか/ 計算問題などがたくさんある問題がほしいです．
  山田のコメント： 「問題集」という意味では米国のテキストはよいかと思います．Schaum's Outline Series (McGraw-Hill) のなかの "Calculus" や，J. Stewart の Calculus （売れ筋）など．
- 数学って言い回しが難しいときありますよね．　**山田のコメント：** なれてくるとむしろ易しく感じます．
- 先生がよくおっしゃる「ウロボロスの蛇」が，どのような意味で用いられているのか気になります．　**山田のコメント：** 循環論法の意味で使っています．ぐぐって．
- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ が収束しないことの証明が鮮やか．　**山田のコメント：** そう?
- 講義資料の "Sorry" や "Thanks" 等が全角なのが気になる．
  山田のコメント： 全角ではないのです．LaTeX の \tiny で使われるフォントはこういうデザインのようです．小さくても視認性の良いように横幅を大きめにとっているのですね．
- 質問は書いてほしいのに，一人一つというのは質問は多い方がいいのでは？ と思ってしまいます．　**山田のコメント：** 純粋に山田の処理能力の問題です．
- むずかったです/むずかしい．　**山田のコメント：** よかった．大学まできて簡単なことばかりじゃつまらないものね．
- マイクが引っかかったときの声に驚きました．　**山田のコメント：** Sorry.
- 先生の授業はいつも元気だね. . .　**山田のコメント：** はい．
- 面白い授業でした/非常に興味深かったです．　**山田のコメント：** でしたか．
- 「バラナラバ」がツボにはまってしまいました．　**山田のコメント：** そう?
- θ の発音が上手ですね．　**山田のコメント：** そう?
- 上の絵（略）は上手だと思いますか?　**山田のコメント：** いいえ．
- WTF!! 愛と勇気だけが友達です XD　**山田のコメント：** 友達少ないんだ．
- 先生は結婚していらっしゃいますか/ 先生って wife と son はいますか?　**山田のコメント：** 個人情報です．
- 髪切りましたか?/髪きりましたね．いくらでしたか?　**山田のコメント：** はい，3800 円
- 彼氏かっこいい．　**山田のコメント：** そりゃよかったね．
- マックおいしい　**山田のコメント：** Windows は?
- 「人間が全員ハゲである」（命題の証明）n 本の髪の毛をもった人間について．(i) $n=0$ のとき ハゲである．(ii) $n=k$ (本) のときハゲであると仮定する．髪の毛が 1 本生えたところで見た目は変わらない．よって $n=k+1$ (本) のときもハゲである．よって より数学的帰納法から（命題）は示された．
  山田のコメント： おめでとう．これでみんな仲間．
- 先生は普段何の研究していらっしゃるのですか?　**山田のコメント：** 微分幾何．Google Scholar・裳華房
- 特になし/なし．　**山田のコメント：** me, too

質問と回答

質問： $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ $(x \neq 0)$, $\frac{1}{2}$ $(x=0)$ が連続であるかどうかを考えるとき，$x_n = 1/(2n\pi)$ と定義して証明していましたが，$\cos(1/x)$ が $x \to 0$ で収束しないので，$2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{2}$ が $1/2$ に収束せず連続でないと考えてもよいのですか?　**お答え：**それでは $\cos(1/x)$ が $x\to 0$ で収束しない，ということはどうやって示しますか．「数列」を適当にとって示すのではないですか? ここでは，それと同等のことをやっているだけです．

質問： 右の図で（図省略．直線 $y = A - x$ が書いてあって，$x=a$ に対応する点が白丸，その $x=a$ で直線からはずれた点が書いてある）$y=f(x)$ が 1 次関数で $x=a$ で微分可能なのですか．$\lim_{x\to a} f(x)$ は存在すると思うのですが，連続ではないですよね?（追記：自己完結しました）

お答え： もちろん連続ではありません．$\lim_{x\to a} f(x)$ は存在しますが，それと $f(a)$ は等しくないので．

質問： 高校のとき「(1) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$」は「(2) $\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = f(a)$」と同値と習ったのですが，授業で (1) と同値であるとしたものは「(3) x が a にどんなしかたで近づいても $f(x)$ が a に近づく」だが，(2) と (3) は同値か．　**お答え：**もちろん (1) と (3) が同値，(1) と (2) が同値なら (2) と (3) も同値（純粋に論理の帰結）．

質問： P. 28, "うまく選ぶことができる" とは何を意味しているのですか?

お答え： この文脈では「このような数列 $\{h_n\}$, $\{k_n\}$ が存在する」ということと同義．

質問： 多変数関数の極限値において，順番を変えても成り立ちますか．たとえば x, y, z の関数 $f(x,y,z)$ とし，α, β, c を任意とした時，$\lim_{z\to c}\{\lim_{y\to\beta}(\lim_{x\to\alpha} f(x,y,z))\} = \lim_{z\to c}\{\lim_{x\to\alpha}(\lim_{y\to\beta} f(x,y,z))\}\ldots$（以下略）が成り立ちますかということです．

お答え： 一般に成り立ちません．講義ノート 28 ページ，例 3.8 (2)．質問文に対してのコメント：(1) 「成り立ちますか」の動詞「成り立つ」の主語は何?「. . . において」の部分は名詞節でないので主節には成り得ないように思います．(2) α, β, c という並べ方は普通ではありません．(3) ご質問の式は「多変数関数の極限値」ではありません．1 変数の極限値をとる作業を 3 回やったものです．

質問： 一般に $f(x,y)$ が (a,b) で連続なときに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right)$ なことは分かりましたが，$\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$ は同様の状況において成立するのでしょうか．

お答え： 同様の状況とは，f が (a,b) で連続ということでしょうか．そうでしたら成立します．この 2 つの極限は (x,y) が (a,b) に近づく 2 つの仕方を与えていますが，f が連続なら，いずれの近づき方でも $f(x,y)$ は $f(a,b)$ に近づくので．

質問： $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ を求めるときに数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を $x_n = 0$, $y_n = 1/n$ として（すなわち $\{x_n\}$ を定数の数列として）$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n)$ を考えても良いのですか?

お答え： それだけではだめ．0 に収束する <u>全ての</u> 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ について $f(x_n, y_n)$ が同じ極限値をとることがわかって初めて $f(x,y)$ の極限値が確定します．すなわち，極限値を求める人に「特別な数列を選ぶ権利はない」．

質問： $f(x,y) =$（略，例 3.8 (1) の関数）を x で偏微分しているとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,y)$ を計算しているとき，y を定数として扱って大丈夫ですか?　**お答え：**大丈夫です．

質問： なぜ，0 でない y をひとつ固定して 1 変数関数の極限値をとると $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{2\cdot 0\cdot y}{y^2} = 0$ となるのかは分かるのですが，$\displaystyle\lim_{y\to 0} \frac{2\cdot 0\cdot y}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$ となるのか理解できません．一回一回計算を区切った場合，前にあった y は内部に残っていないと考えるのでしょうか?

お答え： そのとおりです．「括弧の中は先に計算する」というのが小学校のときに習った原則ですよね．ちなみに質問の文では全体の状況が書かれていないので，意味が不明になっている箇所がいくつかありますね．

質問： 定義 3.11 の (3.3) 式は，高校数学で習った分数の形でも微分可能性を調べることができますか?

お答え： それができないということが講義で説明したこと．ちなみに「高校数学で習った」のは 1 変数関数の微分可能性であって「多変数関数の微分可能性」は別の話だと思いますが．

質問： 定義 3.11 に出て来る $\varepsilon(h,k)$ に名前はありますか?　**お答え：**いいえ．

質問： 微分可能かどうかを判断するには，2 変数関数のとき，x と y で偏微分して f_x, f_y が至るところ連続であることを確かめればよいのでしょうか．めんどくさいです．

お答え： もちろん十分です．しかし，これを満たさなくても微分可能であるような関数（微分可能だが C^1-級でない例，講義ノート 31 ページ，例 3.17）もあるので，この方法で確かめられない場合もあります．

質問： 2 変数関数で 1 つの変数について微分することを偏微分といいますが，3 変数関数で 2 つの変数で微分は可能ですか?　**お答え：**2 つの変数で一度に，という意味ですか？ No です．

質問： 多変数関数のとき，微分可能の条件が「偏導関数が存在して，それが連続である」となるのは 1 変数関数と違って，2 変数の近づき方が無数にあるからですか?　**お答え：**ご質問にあるのは微分可能の十分条件ですね．必要十分条件ではありません．このこと自体は「近づき方が無数にあるから」ではないと思います．微分可能性の定義 3.11 は，無数の近づき方があるためにこの形にせざるを得ないですが．

質問： 授業で説明された，2 変数関数が微分可能なのは $f_x(a,b) = A$ が存在し，$f_y(a,b) = B$ が存在する．そして f_x と f_y が連続である．どうやって f_x と f_y の連続性が確認できますか．全ての f_x の定義域にある値の右と左極限値を求めるんですか?

お答え： 2 変数関数ですから，右・左極限だけでは不足です．実は「きれいな式」で書けている（いい加減な言い方ですが）関数は連続となるので，よく現れる状況ではあまり気にしなくてよいのです．

質問： $f(a+h) - f(a) = Ah + h\varepsilon(h)$ というのはテイラー展開のことですか? $h\varepsilon(h)$ は 2 次以降の項でしたっけ．

お答え： そう思って頂いてよいです．テイラーの定理（山田はテイラー展開と少し違ったニュアンスでこの言葉を使います）については後期の微分積分学第二．

質問： p. 29 の定義 3.11 のところで $f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ とあるが，なぜ第 3 項のところを $\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ とおくのか．$\varepsilon(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ をひとまとめにして $\varepsilon(h,k)$ ではいけないのか．

お答え： もちろんそれでも結構です．いくつかの教科書ではそのように ε をとっています．なお，ご質問のように ε をとった場合は $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$ を $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\varepsilon(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$ に置き換えなければなりません．

質問： $\displaystyle\lim_{h\to 0, k\to 0} f(a+h, b+k) - f(a,b) = 0$, $\displaystyle\lim_{h\to 0, k\to 0} Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k) = 0$ だから $f(a+h, b+k) - f(a,b) = Ah + Bk + \sqrt{h^2+k^2}\,\varepsilon(h,k)$ と言えるのですか．

お答え： いいえ．「2 つの量の極限がともに 0 にいくから，極限をとらない量が等しい」というのは暴力的ではないですか? ご質問では $h\to 0$ と $k\to 0$ を縦に並べてありましたが，今回の文脈では $(h,k)\to(0,0)$ と書くべきです．

質問： $f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$ の $\varepsilon(h,k)$ が何なのかわかりません．どのような意味を持っているのですか． **お答え：**これは ε の定義式と思って下さい．今回の講義で説明します．

質問： 多変数関数において，微分可能であるという定義を偏微分に用いる際は，$f(a+h,b+k)-f(a,b)=Ah+Bk+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$ において h,k のどちらかを 0 にして $f(a+h)-f(a)=Ah+h\varepsilon(h)$, $f(b+h)-f(b)=Bk+k\varepsilon(k)$ としてよいのですか． **お答え：**最初の式はどんな h,k についても成り立つ式なので $k=0$ とおいても何ら問題はない．ただし，ご質問の 2 番目，3 番目は間違いで，たとえば 2 番目の式は $f(a+h,b)-f(a,b)=Ah+|h|\varepsilon(h,0)$ としなければなりません．f は 2 変数関数なので $f(a)$ は意味をもたないからです．

質問： 授業中言って下さったと思うのですが，頭がついていけませんでした．$f(a+h)-f(a)=Ah+h\varepsilon(h)$ と書き直すわけが知りたいです． **お答え：**1 変数関数の微分可能性の定義を多変数化しやすいように書き換えた．

質問： C^1-級などの定義で f' が I で連続とだけかけば，f が I で微分可能であることはわかるのにわざわざ書くのはどうしてか． **お答え：**“f' が存在する” ということを省略すると，もともと存在しないものがある性質を持っていることを要求していることになります．条件を書くためには「f' が存在する」という前提を明示するべきです．

質問： 関数 $f(x)=x$ は $f'(x)=1$, $f''(x)=0$ ですが，$f(x)$ は C^1-級ですか，それとも C^2-級ですか?

お答え： C^∞-級です． $f^{(k)}(x)=0$（$k\geqq 2$）なので，任意の k 次導関数が存在します（定数関数です）．

質問： ある関数が C^∞-級であることを証明することはできるのでしょうか．また C^∞-級であることを確認する方法はあるのでしょうか． **お答え：**たとえば $f(x)=\cos x$ とすると，任意の負でない整数 k に対して $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\sin x$ なので，任意の次数の導関数が存在する．これらは微分可能であるから，連続である．一般に，初等関数はその定義域に含まれる開区間で C^∞-級である（講義ノート 8 ページ冒頭と脚注 23）．このことは事実として利用しましょう．

質問： 多変数関数が C^2-級関数かなどを調べるにはすべての 2 次偏導関数を求める以外の方法はないですか?

お答え： 知っている C^∞-級関数のリストに入っていれば C^∞- 級，という方法もあり．例えば「多項式は C^∞-級」は既知としてよいのでは? 上の質問と回答も参考に．

質問： C^2-級 $\Rightarrow f_{xy}=f_{yx}$ とありましたが，$f_{xy}=f_{yx}\Rightarrow C^2$-級は成り立ちますか? **お答え：**いいえ．

質問： 2 次以上の多項式で近似可能であることに名前がついているのですか?

お答え： 少し強い条件ですが C^k-級．2 次式での近似は，多変数関数の極値問題 (微分積分学第二) で扱います．

質問： C^1-級であることと，グラフに接平面が存在することは同値ですか?

お答え： 接平面の定義は何でしょう．微分可能であれば接平面は（偏微分係数を使って）定義できます．

質問： 講義資料 27 ページの領域の所で，“座標平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D が領域であるとは，‘それがひと続きで端をもたない’ ことである” とありますが，それは「D は x と y それぞれについて開区間である」という表現と同じですか?

お答え： 27 ページの文を読んで「同じ」と想像できるのはなぜでしょう．たとえば，$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2<r^2\}$ は質問のような性質を持っていますか? （山田は「x と y それぞれについて開区間である」の意味が分からないので判定できません）．27 ページの脚注 5 のように，節末（33 ページ末尾）に領域の定義があります．

質問： 講義ノート p. 27 の領域について（略）とあるが，高校数学で領域を図示する問題では，端を含んでいるものがあった．高校数学では 1 変数関数だったので端も含んでもよかったのですか．つまり 1 変数関数と多変数関数では領域の定義が異なるのですか． **お答え：**高等学校で扱ったのも 2 変数関数が定義する領域では? したがって「1 変数関数だから」は間違い．「領域」の高等学校での定義と，ここでの定義が違うだけ．多数派はここでの定義．

質問： 「領域」についていまいち定義が理解できないのですが，現時点で詳しく理解していなくても大丈夫ですか．

お答え： とりあえずは．「いまいち」についてはすでにコメントしましたね．

質問： 領域はどうして端をもってはいけないのですか． **お答え：**端の点（境界点という）では，その集合の中で移動できる方向が限られます．あらゆる方向の関数の変化を調べるには端の点は扱いが複雑なので，ここでは避けます．

質問： 定理 3.16 の証明における平均値の定理 $(f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h)$ について，高校で習った平均値の定理は「$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$ (1) をみたす $c\in\mathbb{R}$ が $a<c<b$ の範囲に少なくとも 1 つ存在する」でしたが，(1) 式は $b=a+h$ とおくと，$f(a+h)-f(a)=hf'(c)$ と変形されます．つまり c は $=a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ と表されたということですか．

お答え： 概ねそのとおりですが，この形にしたのには少しだけ理由があります．定理 3.16 や 3.18 の証明での平均値の使われ方を見ると，実は h が正とは限っていないことがわかります．(A) $h>0$ の場合，ご質問にある「高校の」平均値の定理の b を $a+h$, a を a と書き換えると c は a と $a+h$ の間の数だから，$\theta:=(c-a)/h$ とおくと $0<\theta<1$．すなわち $c=a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ とかける．(B) $h<0$ の場合，「高校の」平均値の定理の b を a, a を $a+h$ $(<a)$ と書き換えると c は $a+h$ と a の間の数だから，$c=a+\theta h$ $(0<\theta<1)$ とかける．

質問： 小テスト（水よう（原文ママ））の問題で $\cos(\sin^{-1} x)$ $(|x| < 1)$ を三角関数を用いて表せ．という問題で $y = \cos(\sin^{-1} x)$ とおくと， $1 - y^2 = x^2$ という関係式が得られ，$\sin^{-1}$ の像が $[-\pi/2, \pi/2]$ なので $y \geqq 0$ となり，$y = \sqrt{1 - x^2}$ を得る．とありますが，$\sin^{-1} x$ の像は普通 $[-\pi/2, \pi/2]$ にとる，と授業でいっていたと思うがどこを取ってもよい，といっていたと思う．$[\pi/2, 3/2\pi]$ などととったら $y = -\sqrt{1-x^2}$ となって，答えは変わるのであると思います．答えはとる像によってきまり，像をとる個人にとってこの問題の答えは変わる，ということでしょうか． **お答え：**sin の逆関数をうまく定義しようと思ったら，値域のとり方はいろいろとれる可能性があるだろう．ここでは（普通やるように）$[-\pi/2, \pi/2]$ を値域にとることと定義することにしました（講義ノート 6 ページ，定義 1.6)．この講義ではこれを定義として採用し，他の値域をとるとは考えないということです．別の文脈で，別のとり方をしているのであれば，たとえばご質問の後半のようなことが起きます．(1) いまの文脈では何が定義なのかに気をつけましょう．(2) 標準でない定義を採用するときは，明記しましょう．

質問： 値域と像の違いがわかりません．高校の授業では，$f(x) = x^2$ の定義域を $[-1, 2)$ とすると，値域は $[0, 4)$ であると習いました．しかし， 大学では値域は $(-\infty, \infty)$ で像は $[0, 4)$ であると習いました．一体どうなっているのですか． **お答え：**講義ノート 2 ページの脚注 10．人によって用語の定義が違うので文脈をよく見てください．

質問： 理解を深められる微積の問題集を教えて下さい． **お答え：**問題が多いものでしたらアメリカのテキストがよい．

質問： 「どんな仕方で近づいても」がすごく気になるので，何か本でも読もうと思うのですが，ヒントになる用語等ありますかね？ **お答え：**極限，$\varepsilon\delta$ 論法など．

質問： 講義資料の文章の文末にしばしばあらわれる ◇ や □は何を示す記号ですか．/式の右下にある四角などのマークはどんな意味ですか **お答え：**“□” は「証明終わり」を表す記号．一般的に用いられる．ハルモス記号 (Halmos, Paul, 1916–2016, Hu) と呼ばれることもある．◇ はここでは「例」の終わりを表すが，一般的な記号ではない．

質問： p. 33, 例 3.22 (i) 中の $\tilde{\sigma}$ という記号の意味について教えてほしい． **お答え：**$\tilde{\sigma}$ で一つのものを表す文字．A と A' が異なるものを表すように，σ と $\tilde{\sigma}$ も異なるものを表す．それ以上の意味はありません．

質問： 「C^k-級関数」という言葉で用いられる大文字の C は何の頭文字ですか? **お答え：**continuous.

質問： C^k-級の “-” はなぜ付けるのか． **お答え：**付ける人とつけない人がいるようですね．どちらでも構いませんが，一つの文脈で混用するのはおかしいようです．“a function of class C^k” という場合はハイフンをつける場所がありませんが，“a C^k-function” というときにはたいていハイフンが入るように思います．

質問： プログラミングの C 言語と C^k 関数の関係はありますか?

お答え： ありません．C 言語は B の後継者じゃなかったっけ．

質問： $\not\to$ この記号の意味は何ですか? **お答え：**文脈は? $\to$ でない（否定）という意味で使いました．

質問： 単語や熟語の英語表記に a と the が混在してるのは何故? **お答え：**中学校や高等学校で学んだように「一般の何か」を表す単数可算名詞には不定冠詞がつき「特定の何か」を表す名詞には定冠詞がつきます．

質問： 講義中に黒板にかいた「$f(x, y)$ in # 6 は $(0, 0)$ で連続でない」のうち in # 6 はどういった意味なのでしょうか? **お答え：**“#” は number と読みます．“# 6” は “number 6”．ここでは黒板の 6 枚目を指したつもり．

質問： 「微分可能でない」を「微分不可能である」と表現することは可能ですか? 教科書でも講義ノートでも前者の表現をしていたので気になりました．

お答え： 後者の表現がないことはないですが，山田には違和感があります．実際，ここで定義しているのは「微分可能」という一つの語です．「微分」という操作があってそれをすることが「可能」という 2 つの語に分解できるわけではありません．したがって，それを否定するなら「不微分可能」「非微分可能」（そんな用語はないが）となる気がするのです．もし，「微分不可能」という語を使いたいのであれば「微分可能でないとき微分不可能であるという」などという定義をする必要があると思います．

質問： $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ の値は $\sin^{-1} x$ と $-\cos^{-1} x$ のどちらですか．

お答え： どちらでも正しい．$\sin^{-1} x = -\cos^{-1} x + \frac{\pi}{2}$ なので（例 1.7 (1)）．

質問： 「“先生がえらい” という命題」とおっしゃいましたが，“えらい” の定義があいまいなので命題とはいえません．

お答え： おっしゃるとおりです．

質問： 1 変数関数 $f(x)$ について $\lim_{x\to a} f(x)$ と $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ は同じ意味ですか．

お答え： 全然違います．$f(x) = x^2$，$a = 1$ の場合に最初の極限は 1, あとの極限は 2 でしょう?

質問： $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}$ が収束しない所がよく分からなかった．別々に飛ばすと -1, 0 になって異なるから収束しないってこと?

お答え： 「別々に飛ばすと」というフレーズだけでは何を言っているのか理解できません．

質問： 定義された領域がそもそも不連続である場合，C^k-級といった表現を用いることはできますか?

お答え： 「そもそも」などという大上段に振りかぶった言葉を使うのですから，「領域が不連続」という言葉の意味は説明できますよね．山田はそういう言葉の使い方を知りませんが.

質問： C^k 級において $k<0$ だったら積分になるんですか．それとも存在しないんですか?

お答え： 講義ノート 26 ページ，31 ページでは $k \geqq 0$ についてしか言っていないのでは? 「存在しない」のではなく「定義しない」ですね.

質問： 定理 3.18 の証明をお願いします． **お答え：**講義ノート 36 ページ.

質問： $f(x) =$（略，例 3.4 の (3)）において $f'(0) = \frac{1}{2}$ となる理由が分かりません.

お答え： 定義そのもの．$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{1}{2}$ だから，というのを 6 月 23 日，26 日と 2 回説明した.

質問： 連続でなくても偏微分はできるということですか? もしそうならなぜできるのですか.

お答え： そうは言っていません．連続でないが偏微分可能な関数がある．理由は「実際に求めてみたら求まった」.

質問： 例 3.10 (1) の f が $(0,0)$ で連続でないことの証明はどのようにするのですか.

お答え： $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2}$ が 0 にならない（実は収束しない）ことを示す．それが 6 月 26 日の講義でやったこと.

質問： 平均値の定理では定理 3.16 以外に何の証明に使われますか.

お答え： ということを今回述べた．見ればわかるのは，定理 3.18 の証明．ある区間で微分が正なら単調増加，ある区間で導関数が常に 0 なら定数関数，テイラーの定理. . . . 微分学の重要な性質の多くは平均値の定理からきている.

質問： f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy} が存在して，そのうちどれかが連続でない関数は何がありますか.

お答え： 問題 2-9．6 月 26 日の講義でも紹介したが $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ である例．したがって定理 3.18 の対偶から f_{xy}, f_{yx} のうちすくなくとも一方（実は両方）が連続でない.

質問： $f_{xy} \neq f_{yx}$ が成り立たないのはどのようなときですか.

お答え： すなわち $f_{xy} = f_{yx}$ となるときですね．講義で述べたように C^2-級なら ok です.

質問： 「x が a にどんなしかたで近づいても」の「どんなしかた」とは例えば何がありますか.

お答え： 「どんなしかたでも」だから x が a に近づく近づき方「全体」を表す．だから「例えば」はありえない.

質問： そもそも n 変数関数（$n = 3, 4, 5, \ldots$）はグラフや等高線に表せるのか.

お答え： その話題は前回完了した．グラフ・等高面の定義は講義ノート 14 ページ，下から 5 行目を見よ.

質問： 講義ノート 32 ページ 14 行目の「:=」はどういう意味ですか． **お答え：**講義ノート 5 ページ，脚注 17.

質問： 陰関数定理の証明は果たして大学 1 年生の頭でも理解できるのか?

お答え： 「大学 1 年生の頭」に一般的な基準があるとは思えませんのでお答えできません.

質問： $f(a+h,b+k)-f(a,b) = Ah+Bk+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(a,b)$ ならば $f(a+h,b+k,c+l)-f(a,b,c) = Ah+Bk+Cl+\sqrt{h^2+k^2+l^2}\varepsilon(a,b,c)$ も成り立ちますか?

お答え： ご質問の意味が分かりません．ご質問の等式は何の仮定・設定もなければ成り立つか，成り立たないかが判定できるものではないと思います．ちなみに $\varepsilon(a,b)$ はたぶん $\varepsilon(h,k)$ のことですね.

質問： $f(a+h,b+k)-f(a,b) = Ah+Bk+\sqrt{h^2+k^2}\varepsilon(h,k)$ のように近似できるのはなぜですか（2 件）.

お答え： ご質問の式は近似式ではありません．等式です.

質問： 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において平均値の定理が成り立つことがわかりません.

お答え： そんなことは一言も言っていません．ここで使うのは，講義ノート 35 ページにある平均値の定理（すなわち高等学校で習った一変数関数の平均値の定理）です.

質問： C^2 級 $\Rightarrow f_{xy} = f_{yx}$ はなるほどなあと思った． **お答え：**どんなところがなるほどなんでしょう.

質問： a に収束する数列についてなぜ考えたかわかりませんでした.

質問： 一次関数に近似できる（原文ママ：一次関数で，のことか）というのがよく分かりません.

お答え： この文では何を聞きたいかわかりません.

質問： C 級の理解が難しいです． **お答え：**そうですか．ところで C 級って何ですか.

質問： $A = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ になるのかわかりません． **お答え：**何を聞きたいのだろうか.

質問： 微分可能と連続と偏微分可能の関係がよくわかりませんでした． **お答え：**具体的にどのへんが?

質問： 連続ということと微分可能ということの扱いの難しさを知った．質問はとくにありませせん． **お答え：**残念.

質問： えらいこっちゃ（山田注：赤字） **お答え：**そうね.