

微分積分学第一講義資料 8

お知らせ

- 授業評価へのご協力をお願いいたします。7 月 4 日 22 時現在 14/114。目標 90/114。

前回までの訂正

- 板書の 2 枚目 ($f(x, y) = x^2 - y^2$, $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $F(t) = f(x(t), y(t))$) の微分で、以下の枠の部分が誤っていました (枠内が正しい)。

$$\frac{dF}{dt}(t) = 2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt} = 2\cos t(-\sin t) - 2\sin t(\boxed{\cos t}) = -4\sin t \cos t$$

- 板書した変数変換 $t(\xi, \eta) = t(\xi(t, x), \eta(t, x)) = t$ を t, x で微分した式の枠の部分が誤っていました (枠内が正しい)。

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \eta} = 1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} \boxed{\frac{\partial t}{\partial \xi}} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial t}{\partial \eta} = 0$$

- 波動方程式の d'Alembert の解の説明で $F(x - ct)$ を「速度 t で右に進む進行波」と板書しましたが、「速度 c で右に進む進行波」。
- 板書 13 枚目、直交座標から極座標の変換で、枠内が誤っていました (枠内が正しい)。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial r} + \boxed{\frac{\partial \theta}{\partial x}} \frac{\partial f}{\partial \theta} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

- 板書 14 枚目、2 次偏導関数を極座標で表す計算で、枠内の部分が抜けていました。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{r} \sin \theta \boxed{\frac{\partial}{\partial \theta}} \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

- 講義ノート 29 ページ、下から 4 行目 ($(h, k) = (0, 0)$ のときは $\varepsilon(h, k)$ が定まらないので):
「定数 A, B をうまくとって」 \Rightarrow 「定数 A, B をうまくとり、十分小さい $(h, k) \neq (0, 0)$ に対して」
- 講義ノート 34 ページ、定理 3.23 の証明の最初の 5 行を次のように変更 (誤りではないがこの方がわかりやすい):
実数 t を一つ固定して、 δ の 1 変数関数 $h(\delta), k(\delta)$ をそれぞれ

$$h(\delta) := x(t + \delta) - x(t), \quad k(\delta) := y(t + \delta) - y(t)$$

とすると、 x, y の連続性から $\delta \rightarrow 0$ のとき $h(\delta), k(\delta) \rightarrow 0$ 。さらに

$$\varepsilon_1(\delta) := \frac{x(t + \delta) - x(t)}{\delta} - \dot{x}(t) = \frac{h(\delta)}{\delta} - \dot{x}(t), \quad \varepsilon_2(\delta) := \frac{k(\delta)}{\delta} - \dot{y}(t)$$

とおけば、 $x(t), y(t)$ の微分可能性より $\delta \rightarrow 0$ のとき、 $\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta) \rightarrow 0$ 。これらの記号を用いると f の微分可能性から

- 講義ノート 38 ページ、下から 3 行目：行列式よぶ \Rightarrow 行列式とよぶ
- 講義ノート 38 ページ、下から 2 行目： $A^1 \Rightarrow A^{-1}$
- 講義ノート 42 ページ、7 行目： $(\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} \frac{y}{x}) \Rightarrow G(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \tan^{-1} \frac{y}{x})$
- 講義ノート 43 ページ、10 行目： $(\sqrt{x^2 + y^2}, h(x, y)) \Rightarrow \tilde{G}(x, y) = (\sqrt{x^2 + y^2}, h(x, y))$

- 講義ノート 43 ページの下から 2 行目の $F : (r, \theta) \mapsto (x, y)$ は $F : (x, y) \mapsto (r, \theta)$ の誤りではないか、というご指摘がありました。が、 x, y が r, θ から定まるので、元の方が正しいです。
- 講義ノート 60 ページ, 5 行目: $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5$

授業に関する御意見

- 進む速度が回によってバラバラなのでペースがつかみにくい/ 授業の進行が少しはやすぎます/ 板書があいつきません/ 先生の説明はやすぎます IIII
山田のコメント: 今回の材料を提供して、次回にもう少しゆっくりやるつもり。
- 急に授業スピードが上がって面食らった。ε の書き方が、まだ慣れないのですが、おすすめの書き方はありますか。
山田のコメント: 実演します。
- 黒板に書く量が多い。
山田のコメント: 14 枚は多い? 前回は 12 枚くらいでしたね。
- 文字が多くて大変だ。 山田のコメント: そんなに多い?
- ギリシャ文字が数式に多く出て来たので若干の抵抗があった。ラプラス何者何だ。
山田のコメント: ギリシア文字に抵抗があると生活に困るかと思えます。ローマ文字と同じように使えるよう、慣れてください。ラプラス: Pierre-Simon Laplace (1749–1827)
- 難しかったです。復習します。 山田のコメント: ぜひそうして下さい。
- 今日から難しくなりました/今日の内容は難しかったです/むずかしいです
山田のコメント: そうですね。
- 何がわからないのかわからなくなってきました。 山田のコメント: そうかもしれませんが。何回が繰り返しているうちにわかってきます。
- 波動方程式のような例はほとんど授業で紹介してほしいです。
山田のコメント: すでにいづつか(熱方程式やラプラス方程式など)紹介していますが、「主目的」ではないので、他の授業で注目しておいてください。
- 非常に興味深かったです。 山田のコメント: はい。
- 出直してきます。 山田のコメント: ぜひ戻ってきて。
- 時に提出用紙に書いてあるものがよめない。外国人なので、かたかななどを書いてあるときはもうちょっと読みやすく書いてくれないですか? 先生の評価はいつもたのしみになっていますから。
山田のコメント: ごめんなさい。なるべく丁寧にしますが、主に講義資料の方を見ていただけたらとありがたいです。
- 20 分くらい寝てしまいました Zzz 山田のコメント: いいなあ
- ごはんの後の授業は非常に眠いものです。楽しそうに授業していて山田さんは幸せですね。
山田のコメント: ゆっくり眠れるのもいいですね。
- 火曜日朝早いよー
山田のコメント: そう思うけど。
- 教授が最初に座って心臓がどきんとしました。 山田のコメント: そんなに驚かないでよ。
- 微積 LOVE 山田のコメント: ええ
- 先生の授業はとて $x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1$ です。
山田のコメント: そうですか。この図形は C^∞ -級関数 $F(x, y) = (x^2 - 1)(x^2 - 3y^2 - 1)^2 - (x^2 - y^3 - 3y + 3x^2y)^2$ の高さ 0 の等高線になっていますね。点 $(0, \pm 1)$ は $dF = 0$ となる点、すなわち特異点になっています。
- 「定期試験の成績があまり良くないとき、提出物の成績を考慮する」とあるが、この提出物の点数がそのまま等倍では足りない点数を埋め合わせてくれますか?
山田のコメント: 状況によって適当な倍率をかけます。
- テストに証明などは出ますか? 山田のコメント: きめてません。
- テストに持ち込めるものが新だと思えました。 山田のコメント: 持ち込めないもののリストが斬新なのは?
- 資料中によく見られる表現「簡単のため」は「簡単」というのは形容動詞の語幹であるから、「簡単の」という表現は日本語としておかしいが、数学の文献でよく見られる表現であるため誤りの指摘としては書かなかった。
山田のコメント: for a simplicity とか for a sake of simplicity の訳語ですね。
- 講義資料と教科書で関連した内容があれば、講義資料のほうに教科書のページ番号を書いてちゃんと教科書を活用したほうがいい気がします。
山田のコメント: 最初の授業時間、6 月 16 日、23 日の講義資料にて「講義」という漢字の誤りを指摘しています。
- Today is a good day to die!
山田のコメント: Really? (オーストラリア風の発音?)
- 弟が消しカスを食べるのをやめようとしません。何度注意してもやめてくれません。弟が心配です。なんとかやめさせることはできませんでしょうか。
山田のコメント: 知りません。然るべきカウンセラーに相談すべきでは?
- 毎授業チエックシャツを着てるのが僕です。見つけてください。 山田のコメント: それは東工大スタンダード?
- 東工大のことをどう思ってますか? 山田のコメント: 勤務先。
- 東工大出身ですか? 山田のコメント: いいえ。
- 光ちゃんって呼ばれますよ。 山田のコメント: そう? 光栄。
- 文字をカラフルにしてみた(小学生) 山田のコメント: 手間がかかります。
- 特になし 山田のコメント: me, too.

質問と回答

質問: $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の Example について、講義では $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta$ としていました。『 $x = r \cos \theta$ より $r = \frac{1}{\cos \theta} x$ 』では $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos \theta}$ を定数とみなすから、 $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos \theta}$ の考え方はどこが間違っていますか。

質問: \heartsuit で $x = r \cos \theta \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} (r \cos \theta)$ だと $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos \theta}$ はなんでですか?

お答え: 「変数変換」とその「逆変換」の微分の関係式である、という前提をわすれるとこのように間違いやすいので、今回きちんと説明しますが、とりあえずここで:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

という 2 つの 2 変数関数の組で、変数 (r, θ) と (x, y) の関係が分かります。この「逆」というのは、上の等式を (r, θ) についてといたものです。 $x = r \cos \theta$ を r について解いて $r = x / \cos \theta$ とするのは、 (x, y) と (r, θ) をペアにして扱っていないので、ここで言っている状況ではありません。実際、逆にとくと(正確には講義ノート 43 ページをみよ)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}.$$

この状況で、すなわち (x, y) は (r, θ) の関数、 (r, θ) はこれを解いて求めた (x, y) の関数であるときに

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1}$$

が成り立つということです。下線を引いた部分を忘れないようにしましょう。

質問： 講義資料 40 頁の注意 4.4 に「文脈で独立変数がはっきりわかるなら」とあります。この「独立変数がはっきりわかる」とは、具体的に「何がどうである」状況のことでしょうか。「 x と y, ξ と η が独立変数の関係にあることがあきらかだ」という状況で合っていますか。

お答え： 合っていません。関数 $f(x, y)$ の、自由に動かせる変数 (x, y) のことを独立変数といいます。この (x, y) を、関係式 $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ によって別の変数 (ξ, η) に置き換え、 f を (ξ, η) を独立変数にもつ関数 $\tilde{f}(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ に変更することを変数変換と言います。このとき \tilde{f} の独立変数は (ξ, η) ですが、文脈でこれを考えていることがあきらかな場合、 \tilde{f} の代わりに f と書くということです。たとえば f_x や f_y がでてくる状況では独立変数は (x, y) ですが、 f_ξ や f_η がでてくる状況では独立変数は (ξ, η) です。

質問： $\frac{\partial}{\partial t} \left(-c \frac{\partial f}{\partial \xi} + c \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) = -c \frac{\partial}{\partial \xi} \left(-c \frac{\partial f}{\partial \xi} + c \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) + c \frac{\partial}{\partial \eta} \left(-c \frac{\partial f}{\partial \xi} + c \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)$ となる過程を教えてください。

お答え： この文脈では一般に、関数 $*$ に対して $\frac{\partial *}{\partial t} = -c \frac{\partial *}{\partial \xi} + c \frac{\partial *}{\partial \eta}$ が成り立つのでした（これがこの文脈での Chain rule）。

質問： $\partial/\partial x$ と講義資料に書いてあり、黒板には $\partial f/\partial x$ と書いてあったため、混乱した。どうということなのか。

お答え： どんな関数 f についてもこの変数変換の公式が成り立つという意味で f を省略した（よく使われる書き方）：

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \heartsuit}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial \heartsuit}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \heartsuit}{\partial \theta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

質問： $\frac{dF}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \frac{dy}{dt}$ の (t) や $(x(t), y(t))$ は省略するのが省略しないのではどちらが多く見られますか。

お答え： どちらもしばしば見られます。

質問： 変数が 3 コ以上になっても今日習ったのと同様の方法で偏微分できますか？

お答え： 合成関数の微分公式ですか？ はい。

質問： n 変数の間の変数変換に関しても $n \times n$ のヤコビ行列を用いることで変数変換できるのですか。

お答え： はい。

質問： n 個の文字を n 個の別の文字に対応させたとき、 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\xi_1, \dots, \xi_n)$ のヤコビ行列と $(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ のヤコビ行列も互いに逆行列になりますか。’

お答え： はい。

質問： 2 回微分について、 x で微分しているのになぜ急に r や θ での微分の形に式変形されているかわからない。

お答え： 2 次偏導関数をもとめる以前に 1 次偏導関数のところすでに x に関する偏導関数を r や θ に関する偏導関数で表していますが、そこはスルーですか？ 変数 (x, y) の関数の独立変数 (x, y) を変数 (r, θ) に置き換えて (r, θ) の関数と考えたとき、 x に関する偏導関数が r, θ に関する偏導関数でどう表されるかを考えよう、という問題だったのです。

質問： 波動方程式の説明のときに、 $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ より $\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \eta} = \varphi(\eta)$ であり、 $f(\xi, \eta) = \int \varphi(\eta) d\eta + G(\xi)$ となるのは η で偏微分したとき $G(\xi)$ がきえるから良いと説明されていたが、順序交換可能なので $\frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} = 0$ より $\frac{\partial f}{\partial \eta} = g(\xi)$ であるから $f = F(\eta) + G(\xi)$ になっていると考えるべきではないですか？（下線山田）

お答え： 下線部分の「であるから」が説明不足です。 $f_\eta = g(\xi)$, $f_\xi = \varphi(\eta)$ から、どうして f が ξ だけの関数と η だけの関数の「和」となるのか説明できますか？

質問： $f(x, y) = x^2 - y^2$ を $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ の範囲にしかない $x = \cos t, y = \sin t$ とおきかえてよいのか。

お答え： 曲線上で関数の変化を考えるという文脈ですから、 x, y は考えている曲線上を動けば良い。定義域全体を見ようとは（この文脈では）考えていない。

質問： 「値域」と「像」について自分の解釈が正しいのか不安なので、判定をお願いします。 $f(x) = \sin x$, 定義域を $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とするとき、値域： $[-1, 1]$ (x が実数全体を動くとき $f(x)$ がとれる値の範囲), 像： $[0, 1]$ (x が定義域の範囲内を動くとき、 $f(x)$ がとれる値の範囲)。

お答え： 値域の解釈が違います。関数 f の値域とは「想定している f の値の取りうる範囲」です。たとえば、実数全体を定義域とした関数 $f(x) = \sin x$ の値域を \mathbb{R} と考えることもできます。すなわち、関数の値域は「どう想定しているか」によって変わります。一方、 \mathbb{R} を定義域とする $f(x) = \sin x$ の像は $[-1, 1]$ で、これは値域をどう考えようが変わりません。なぜ「想定している」という中途半端なことをいうか：一般に関数 $f: A \rightarrow B$ (A, B は \mathbb{R} の部分集合) と書こうとすると、 B を f の像（取りうる値の範囲）としなければならないとすると、関数の定義から自明に B が決定できない、ということがある。たとえば $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ で与えられる関数の和 $(f+g)(x) := f(x) + g(x) = \sin x + \cos x$ を考える。 f, g の像はともに $[-1, 1]$ なので $f+g$ の像は $[-2, 2]$ に

- 含まれることはすぐに分かりますが、本当の像は $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ です。ここで、この f と g の値域を \mathbb{R} と考えれば、 $f+g$ の値域も \mathbb{R} と考えて何の問題もなくなるわけです。あたえられた関数の像を調べるのは数学的に大問題である場合もあり、つねに「像」を考えなければならないとすると関数の記述すらできなくなる場合があります。
- 質問： 波動方程式に波を表す以外の使い方はありますか？
- お答え： むしろ波動方程式に従う量のことを波とよぶのではないのでしょうか。ここで挙げた波動方程式やその高次元化に限らず、さまざまな一般化された波動方程式があるので、どちらが先かは分かりませんが、電磁波の発見の経緯（マクスウェルによる予言、ヘルツの実験による確認）を思い出してみよう。
- 質問： $df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ からなぜ $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ と表せるのかが分かりませんでした。
- お答え： 講義ノート 32 ページ、例 3.20。講義の際に黒板でも説明した。
- 質問： 勾配ベクトルの grad も $\frac{\partial}{\partial x}$ のような記号と同じ扱いですか。それとも、違う表記があったりしますか。
- お答え： ∇f などと書くこともあるようです。
- 質問： Jacobi はどちらで読むべきなのか？
- お答え： 日本の人が日本の文脈でよむときは“ヤコビ”だと思います。英語の文脈で“ヤコビ”と読む人はほとんどいません。
- 質問： イコールがマイナスに見えてつらい。お答え： Sorry.
- 質問： η (eta) がうまく早く書けません。 ζ (何とよむかわからない) は今後授業でたくさん板書しますか？ もし授業で扱うなら、 η とともに家で書く練習をしますか。
- お答え： ζ は zeta だ、と授業でいいませんでしたっけ？ 理工系の世界ではギリシア文字は読み書きできることが前提だと思います。
- 質問： 行列を表す際、 A や E といったアルファベットは大文字で用いるのに対し、 ξ や η といったギリシア文字は小文字を用いるのは何故ですか。
- お答え： 今回の授業では ξ, η で行列を表してはいません。
- 質問： ξ, η, ζ は書き慣れていないので使いにくいです。他の記号では駄目ですか？
- お答え： 慣習的によく使われるのでそれに合わせる必要がある。あなたひとりのわがままは通りません。たとえば ξ, η, ζ をつかう人がいて（多数派）、その人と議論するにはあなたもそれに合わせなければなりません。自分だけが独自の記号をつかって自分の世界に入ってしまうことは一般に許されません。
- 質問： ξ の上手い書き方を教えてください。お答え： では黒板で。
- 質問： 象像（原文ママ：写像のことか）は授業でやるのでしょうか。（テキストに書いてありましたが授業でとばされました）
- お答え： 言葉を「正確」に表すには写像の言葉が必要なのですが、そこに拘泥しないで大雑把に捉えてもらいたいと思います。講義ではあえて写像の言葉を避けました。正確な表現を知りたい方は講義ノートの「写像」という言葉を使うのがよいと思います。
- 質問： 合成写像と恒等写像についてわかりません。
- お答え： 「についてわかりません」という表現では、わからない対象が曖昧にぼかされていて答えられない。講義ノート 41 ページのどのへんがわからないのか。
- 質問： P 40 で使われた写像が理解できません。P 41 の注 12 では a map と説明していますが、それが理解出来ませんでした。 D の各点 (x, y) に対して \mathbb{R}^2 の要素 $F(x, y)$ と対応させる対応の規則であると言われましたが、写像と関数は関係あるのでしょうか。
- お答え： 一般に、集合 A の各要素に対して、集合 B の要素を対応させる規則を写像という。とくに B が数の集合（たとえば \mathbb{R} や \mathbb{R} の部分集合）であるような写像のことを特に関数という習慣があるようです。
- 質問： 微分可能性の議論で $f(a+h, b+k) - f(a, b) = Ah + Bk + \varepsilon(h, k)\sqrt{h^2 + k^2}$ としたとき、どうしてこう置いたのかということと、 $\sqrt{h^2 + k^2}$ である意味を教えてください。スモールオーを用いた微分可能性の証明も知りたいです。
- お答え： 前半：1 次式で近似したときに、それより小さい誤差がでてくるような形のつもり。 $\sqrt{h^2 + k^2}$ は点 (a, b) と $(a+h, b+k)$ の距離、と説明した記憶があります。後半：“ o ”（ランダウの記号）の扱いは、場合によっては誤解を招きやすいので今回は扱いません。微分積分学第二で言及します。
- 質問： 近似式 $f(a, b)$ で (a, b) で微分可能な関数を考えた時（原文ママ：「 (a, b) で微分可能な関数 f の近似式で」では？） $(\Delta x, \Delta y)$ が $(0, 0)$ に近いとき、 $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\Delta y +$

$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ で $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ が 0 に近づくことを使い、 $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ を 0 として近似していたのですが、 $\varepsilon(\Delta x, \Delta y)$ はどうして 0 に近づくのですか？ また $\Delta x, \Delta y$ が同じ近づき方（近づき方、一次の近づき方）をするのはなぜですか？ 字が汚くてすみません。

お答え： 前半：微分可能性の定義（定義 3.11）を見よ。そのままではないか。後半：同じ近づき方をする必要はありません。 $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$ のとき、「 $\Delta x, \Delta y$ の 1 次式」のオーダーで 0 になるということなので、 $\Delta x, \Delta y$ の 0 への近づき方は何も規定していません。

質問： どんなベクトル v に対しても v 方向に微分可能かどうかというのはどのように調べるのですか？

お答え： 関数 f が点 a において v （念の為、太字ですよ）方向に方向微分可能とは $F(t) = f(a + tv)$ が $t = 0$ で（1 変数関数として）微分可能であること。このことを確かめる。

質問： 行列の中に変数 x, y などの項が存在していた場合 $f(x, y) =$ 行列 などとおき微分することは可能ですか？ またもしできないのなら理由はなぜですか？

お答え： 普通に微分します。たとえば $F(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ に対して $\frac{dF}{dt}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t & -\cos t \\ \cos t & -\sin t \end{pmatrix}$ 。

質問： ♡ 式の検算で $\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}$ となるのがわからなかった。

お答え： $y = r \sin \theta, x = r \cos \theta$ なので $y/x = \tan \theta$ 、という説明をしたが、その先の話？

質問： なぜ波動方程式が登場してきたのですか？

お答え： 変数変換をすると嬉しいことがある、という例として。

質問： 変数変換すると何かいいことがありますか？

お答え： あったでしょ。波動方程式の一般解がかけた。もちろん、それは無数にあるご利益のうちほんの一つ。

質問： 変数変換をする意味とは何でしょう。

お答え： いくつもあると思いますが、今回の例はどう？

質問： 逆写像を考える意味がわかりません/ 逆写像を考えるメリットって何ですか？

お答え： 一変数関数の逆関数を考える意味・メリットはわかっていますか？ そこから類推できませんか？

質問： 普通の極座標表示とは異なる表示方（原文ママ）の極座標の使い道はどんなものなのか。どう便利なのか。

お答え： 何を指しているのか分かりません。

質問： サイクロイドはなめらかでない部分があるが C^∞ -級関数のグラフなので、レムニスケートとは違うのか。

お答え： サイクロイドは C^∞ -級関数のグラフ（講義ノート 4 ページの意味）にはなっていません。

質問： チェイン・ルールの名前の由来はどこからきているんですか？

お答え： ∂x などの記号が鎖のようにつながっているからじゃないかな、と授業で説明しましたが。

質問： チェイン・ルールは多変数関数であっても使えますか？

お答え： 今回やったのは多変数（2 変数関数も多変数関数の一種ですね）では？ 3 変数以上ということでしょうか。

質問： 授業の最後に laplacian の極座標表示というのがありましたが、他の表示の仕方はありますか？

お答え： 座標変換は無数にありますから、それに応じてたくさんあります。

質問： $f(x, y)$ において $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varepsilon}$ なのが不思議だった。

お答え： そうですか。ところで講義では ε ではなく ξ を使ったのですが、ここで ε に変えた理由はなぜですか？

質問： $\begin{pmatrix} \sim & \sim \\ \sim & \sim \end{pmatrix} \dots$ のやっつて行列ではないですよね？ お答え： 行列です。

質問： どうして行列で表すものができたのですか？

お答え： 文脈を明らかにせよ。

質問： n 変数のときも変数変換をするとヤコビ行列を使えるのか。行列を用いると（山田注：字がだんだん薄くなって消えている）

お答え： 途中で終わっていますが。

質問： 二重積分はどのようなときに使い、どのような性質がありますか？

お答え： それが第 5 回以降の主題。

質問： プリントの太字になっているような名称は覚える必要はありますか。 お答え： はい。

質問： 中間試験に持ち込める紙はボールペンで色をつけるなど紙に変形を加えないのならばどのようにしてもよいのですか？

お答え： はい。そう言いませんでしたっけ。

質問： 火曜日に返却するんですか？（切実）1 限は難しいです。

お答え： 当日に受け取れない方への指示は試験問題に書いておきます。

質問： キューピーさんの3分 cooking とは???

お答え： キューピー 3分クッキングはTVの料理番組。「こちらにできあがったものが...」というたとえとして使った。

質問： 分からないところが分からない時は、どのような態度で授業に臨むべきでしょうか。

お答え： まずひとつ一つの言葉の意味（イメージでなく意味）を確かめてください。

質問： 頭で処理しきれなかったので出直してきます。 お答え：お待ちしております。

質問： 呪文のような授業だったのでもっと勉強する。 お答え：そう？

質問： 講義プリントの方向微分可能と微分可能の違いがわかりません。 お答え：「講義」って何ですか？

質問： アバババ... お答え：ウブブブ...