2015 年 7 月 14 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 10

お知らせ

- 授業評価へのご協力お願いいたします．7 月 13 日 8 時 30 分現在 18/114．目標 90/114．
- 次回 7 月 17 日に中間試験を行います．すでに予告をしておりますが，聞いていないというかたは講義 web ページ，OCW より「中間試験予告」の用紙を入手しておいて下さい．
- 資料内で [このように] 書かれているところは適当な web サイトへのリンクがはられています．

前回までの訂正

- 板書 3 ページ：C^* 級の $*$ が読めなかったというコメントがありました．文脈が定かではありませんが 7 月 10 日の講義では $*$ を ∞ として差し支えありません．
- 板書 9 ページ；「$|\Delta| \to 0$ $(*)$ とすると f は $[a,b]$ で積分可能（$(*)$： α, β, γ の近く）」とあった，とご指摘がありました．陰関数定理の説明の部分が消え残ったのでしょうか．
- 「3 変数関数のとき $x = \xi(y,z)$, $y = \eta(x,z)$, $z = \xi(x,y)$ と書いてありましたが，ξ を 2 回使ってましたが，それは大丈夫でしょうか」という質問がありましたが，文脈不明．最後の ξ は ζ です．
- 「ゴキブリが ∞ こいるという表現」が誤りというご指摘がありました．原始関数がひとつあればたくさん（無限個）ある，一匹見つければ 30 匹いると言われるゴキブリのように，という（ただの例え）話でした．
- 講義資料 8，1 ページ「前回までの訂正」2 項目の 1 行目：ξ, η で微分した ⇒ t, x で微分した
- 講義資料 8，3 ページ，8 個目の質問の回答：偏動関数 ⇒ 偏導関数
- 講義資料 8, 3 ページ，下から 2 行目から一番下：
  たとえば $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ で与えられる関数の和を考えると $(f+g)(x) := f(x)+g(x) = \sin x+\cos x$ としましょう．⇒ たとえば $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ で与えられる関数の和 $(f+g)(x) := f(x)+g(x) = \sin x + \cos x$ を考える．
- 講義資料 8，4 ページ，2 行目：あたえれた ⇒ 与えられた
- 講義ノート 50 ページ 5 行目：$\underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-n1}) = 0$ ⇒ $\underline{S}_\Delta(f) = \sum_{j=1}^{N} 0(x_j - x_{j-1}) = 0$
- 講義ノート 52 ページ下から 3 行目：区間 $[a,b]$ ⇒ 区間 $I = [a,b]$
- 講義ノート 57 ページ下から 4 行目：のにおける ⇒ における
- 講義ノート 69 ページ下から 7 行目：「ほぼ 1 対 1」に写る ⇒ 「ほぼ 1 対 1」に移る
  写像により点が点に「うつる」というときは「移る」と「写る」のいずれの漢字も使うようです（どちらの用例もある）．講義ノートでは，66 ページの補題 6.11 で「移る」を使っていて混用になっています．どちらかに統一しなければならないので，69 ページの方を訂正します．
- 講義ノート，問題 4-9 の解答例 2 行目：$C \neq$ なのは ⇒ $C \neq \emptyset$ なのは

授業に関する御意見—授業評価から (7 月 3 日以降分)

- 微積楽しい　**山田のコメント：** それはよかった．
- 生徒からの質問を積極的に受け付けている点が非常にありがたかった。　**山田のコメント：** ご活用ください．
- 催促されたので回答してみた。催促のない授業は面倒なので回答しない。　**山田のコメント：** そうですよね!

授業に関する御意見

- やっぱり積分の方がむずかしいです. **山田のコメント：** そう？ どういう観点でみて難しいのか?
- 実はこの授業がいきなり 2 変数関数の微分から始まることにびっくりした.（どうして limit から始まらなかったのか $\Pi\,\Pi$ ショック）演習問題は非常に難しいです T T 30 分で 4 問はきつすぎると思います. **山田のコメント：** そこでできなくても，あとでやり直してくださいね.
- 講義ノートに例だけでなく，そのグラフや図などもあるともっとわかりやすいです. **山田のコメント：** 手間がかかります．その分を黒板やスクリーンで補足していますので活用してください.
- ジェスチャーもつかっている授業はとてもおもしろいと思っています. **山田のコメント：** 体がいたい.
- 黒板の一番上 20cm くらいが見えないです. **山田のコメント：** そうですか．気をつけます.
- 板書で $\therefore$ や $\because$ が傾いて（略）のようになっているとどちらのことなのか判別できません. **山田のコメント：** Sorry．文脈で判別できないときは指摘してください.
- 字をもうちょっときれいにしてほしいです. **山田のコメント：** 善処します.
- 字が読みづらいです．特に ♡ が. **山田のコメント：** Sorry ♡
- ♡ を使う回数が多いと思います. **山田のコメント：** ♡
- 書く量が多くて手が疲れました. **山田のコメント：** me，too.
- 今日は寝ませんでした!! **山田のコメント：** me，too.
- 朝より午後の方がねむくてつらい. **山田のコメント：** me，too.
- 体調が悪くて先生の授業に集中できません. **山田のコメント：** お大事に.
- あついよ〜 **山田のコメント：** 前にいるとあまりよく分からないので，適切に調整してください.
- チョークがよく折れますね. **山田のコメント：** 筆圧が強いんですかね.
- ギリシャ文字のアルファベット順が $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ときて，ζ なのは意味がわからない. **山田のコメント：** ローマ文字が $abcde$ ときて次が f なのは意味がわかるのでしょうか.
- 面密度は BMI と同次元. **山田のコメント：** そうですね!
- 「原文ママ」の「ママ」は「そのママ」の「ママ」ですか．それとも，教えるママの役割の「ママ」ですか．それとなぜカタカナなんですか. **山田のコメント：** [編集用語]．習慣的にカタカナを使う.
- ゴキブリは集合ホルモンを持ち，特にそのふんは 1 年くらいは仲間を呼び寄せるそうです．陰関数の説明がわかりやすかった. **山田のコメント：** はぁ.
- ゴマかしがきかないのは怖いです．どんな場合でも. **山田のコメント：** そうですね.
- 中間試験，簡単にしてください（期末も） **山田のコメント：** なぜ？
- テストには皮フなどに生存しているダニや微生物は持ち込めますか. **山田のコメント：** はい，ぜひ持ち込んでください.
- ケクレが夢で見た蛇は，[ウロボロスの蛇] だと思う. **山田のコメント：** そう?
- 教授が講義の始まりのときに学生と一緒に席についているのが，笑点の歌丸さんみたいで面白いです. **山田のコメント：** 以前は，先代の圓楽でしたね．その前は三波伸介.
- 授業評価は何をかいてもいいですか? **山田のコメント：** はい，何でも.
- 微分！ 積分！ 偏微分！ 重積分！ 周回積分！ セブン！ イレブン！ いい気分！ （ [顔文字] 略） **山田のコメント：** 手間かけさせやがって...
- むずかしい **山田のコメント：** それはよかった.
- 特になし/なし/なし **山田のコメント：** me，too.

質問と回答

質問： 《前回の補足》での質問ですが，$f(x,y)$; $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}$ を求めようとすると，$r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$ を代入しなければならないですか? $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y} = \cos\theta f_x + \sin\theta f_y$ ではだめでしょうか.

お答え： f_r を f_x, f_y で表すならこの方法でよいです．ここで考えた問題は $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ を r, θ に関する偏導関数で表すことですから，f_x を f_r, f_θ で表したい，すなわちご質問の式の逆の関係が必要となります．そのためには r, θ を x, y で微分した量，すなわち r_x, r_y, θ_x, θ_y が必要ですが，これらの求め方は，ご質問のように $r = \sqrt{x^2+y^2}$ などを微分する方法の他に，授業で説明した次の関係式 $\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1}$ を用いる方法があります．もちろん，ご質問にある式をつかって $f_{rr} + \frac{1}{r}f_r + \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$ を計算して，$f_{xx} + f_{yy}$ と一致することを示してもよいですが，この方法は結論を知らないとできませんね.

質問： 5-7 の問題の解答についてなのですが，答えが $\int 4\pi r^2\rho(r)\,dr$ となっていて，これは面密度 $4\pi^2\rho(r)$ を足していくと考えているのですか? 自分は $\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2\Delta r + (\Delta r^2$ 以上の項$)$ で Δr^2 以上の項を無視して（Δr が小さいと考えて）$4\pi r^2\Delta r$ に密度 $\rho(r)$ をかけてこれを足し合わせる，つまり積分して $\int 4\pi r^2\rho(r)\,dr$ と考えたのですが，これは解法となりますか? また誤っているのなら正しいものはどのように考えるべきでしょうか. **お答え：** 解答を見てくれたのなら，解法が書いてあるのもご存知ですよね．ご質問にあることと全く同じことをやっています．よく読んで下さい（ここでは「いい加減バージョン」がわかればよいです）.

質問： 関数 $f(x)$ が a で連続だと（山田注：微分可能のことか）$f'(a)$ は点 a での gradient (勾配) ですね．$g(x,y)$ の偏導関数 g_x, g_y もその関数の gradient の関数ですか．それとも全微分関数がその gradient function ですか．もしそうしたら g_x, g_y は $g(x,y)$ の何かを表していますか.

お答え： 2 変数関数の勾配 (gradient) はベクトル $\operatorname{grad} g := {}^t(g_x, g_y)$．これは全微分 $dg = g_x\,dx + g_y\,dy$ と本質的には同じもの．g_x, g_y は特別な方向 $(1,0)$, $(0,1)$ に関する方向微分を表しています．講義ノート 39 ページ参照.

質問： 今回解説した，1 変数関数の積分においては，積分を面積から定義して，面積を既知としているんですよね.

お答え： 違います．口頭での説明では「面積」（それも長方形の面積しか使っていない）という言葉を用いましたが，講義ノート 49 ページでは「面積」という語を全く使わないで積分を定義しています.

質問： 結局，高校の積分の定義は，原子関数（原文ママ）があるときしか定義できない不十分な定義ということですか?

お答え： ちょっと違う．高等学校式の定義では「原始関数が存在するとき」がいつかを特定できない．ちなみに原子関数ではありません.

質問： 今までの定理を組み合わせることにより，ある関数が C^∞-級である $\Rightarrow$ 原始関数をもつは正しいということですね? **お答え：** もちろん．それでもって原始関数も C^∞-級.

質問：「積分可能 $\Leftrightarrow$ 連続 は成り立たない」で合ってますか?

お答え： 定理 5.9, 例 5.3 を見るとどちらの矢印が成り立ち，どちらが成り立たないかわかります.

質問： 連続関数はなんで原始関数をもつのですか?/ 微分可能でないと微分できないのに，連続であれば積分できるのはなんでですか? 積分の方ができる範囲が狭いと思ってました.

お答え： 命題 5.12. 積分可能性はここでは証明していないが，その事実を認めれば，原始関数の存在が証明できる.（数学的には「なんで成り立つか」といわれると「証明できているから」なんですね).

質問： 積分の高等学校でない方の定義がよくわかりませんでした.

お答え： どのへんが? よくわからなくても，とりあえずよいです. 原始関数を使うのではなく，区分求積法の形を用いて定義する，ということだけ頭の隅においてください.

質問： アリストテレスの考えていた積分のコンセプトは区分求積とほとんど同じ考えであるか. **お答え：**である.

質問： なぜ先生は授業中に「微分より積分の方がやさしい」と連呼していたのでしょうか. 先生は「微分より積分の方がやさしくないと考えている」ということですか.「やさしい」の定義は先生が考えた定義で構いません.

お答え：「A と B のどちらがやさしい」という文の曖昧さを理解してもらえればよいのです.「微分より積分のほうが難しいのは当たり前だよね」というような暴力的な発言はしないように.

質問： 積分するとき分割して一つひとつ計算すると言っていましたが，何分割ぐらいにすればいい値が求まりますか.

お答え： そのように計算するかどうかは，何をどう積分したいかによる. 分割の数は，どういう関数の積分を計算して，結果の誤差がどれくらいまで許されるかによって変わる.

質問： 原始関数と不定積分の気分の違いはどのようなもので，先生はどうして不定積分ではなく原始関数という言葉を使うのですか? **お答え：**微分して f になる関数を f の原始関数，$\int_a^x f(t)\,dt$ を f の不定積分といいます. 前者の意味で使うときは原始関数というのが自然だと思います. もちろん f が連続なら両者は同じもの.

質問： なぜ e^{-x^2} の原始関数は $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ ではないのですか (講義ノート p. 53).

お答え： $\frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-x^2}$ なので，ご質問の関数は原始関数ではなく，もとの関数そのものになってしまいます.

質問： 三角形の面積では 1/2, 三角錐の体積では 1/3 のように n 次元の体積が $1/n$ になるのはなぜですか?

お答え： それを講義で説明した. 高さ方向に軸をとると，軸に直交する直線・平面. . . で切った図形の切り口は，$n-1$ 次元の図形でその体積は直線・平面. . . と錐の頂点からの距離 x の $n-1$ 乗に比例する. その総和が錐の体積.

質問： 円錐のが底面の面積 $\times$ 高さ $\times$ $\frac{1}{3}$ という式の 1/3 の理由が x^2 を積分した $x^3/3$ の 1/3 の部分とお話になっていたのですが，x^2 はどういうことを表しているか，話していたと思うんですけど，理解が追いつかなかったので，もう一度説明お願いします. **お答え：**前の質問と回答参照. このことは高等学校の教科書あります.

質問： 四次元空間において，四つ目の座標に比例する底体積を四つ目の座標に沿って積分すると何がもとまりますか?

お答え：「四次元錐」の「体積」(って講義で言いませんでしたっけ).

質問： f に対して F が初等関数で表せない例とは，具体的に何がありますか?

お答え： F は f の原始関数ですね. 第 1 回の講義で $\int e^{-x^2}\,dx$ を例に挙げましたが.

質問： x^n の原始関数は $\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$, $\cos x$ の原始関数は $\sin x + C$ (C: 積分定数) のように初等関数の原始関数や導関数はきれいに表されると思うのですが，これは微積分でうまく表せるように定めたのですか. それとも偶然ですか. **お答え：**第 1 回の講義でも説明しましたが，初等関数の原始関数は一般に初等関数になるとは限りません.

質問： 高校のときたまに積分できない関数がでてきました. 大学で数学をやる中で積分できない関数はありますか?

お答え：「積分できない」の意味は何ですか? (1) 積分可能でない（講義ノート 49 ページの意味). 例 5.2 が具体例. (2) 原始関数が初等関数で表せない. 上の 2 つの質問と回答参照. (3) 難しくて積分計算がでない. この場合は，あなたが何ができるかわからないので，説明できません.

質問： 板書 10 ページの $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ が何の値なのかわからない.

お答え： はっきりは述べていませんね. D を小さな長方形（横 Δx, 縦 Δy）にわけたとき，$f(x,y)\Delta x\,\Delta y$ の，長方形全体の総和を考える（(x,y) は考えている長方形の点). 分割の幅を 0 に近づけたときの極限値がこれ.

質問： プリント p. 57, 9 行目の理論的な背景とはなんですか.

お答え： たとえばコンパクト集合の意味，面積確定の意味をきちんと押さえていない，連続関数の積分可能性を示していないなどなど.

質問： 長方形上の積分とコンパクト集合上の積分の違いは何ですか. **お答え：**積分範囲の形.

質問：「$\mathbb{R}^2$ の面積確定集合 D の面積が D 上で定数関数 1 を積分したものである」というのがよく理解できない.

お答え： D の面積 $= \int_D 1\,dx\,dy$. それだけ.

質問： 最後にやった重積分 $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ の説明の中で $\sum f(x,y)\Delta x\,\Delta y$ という式がでてきました．円の面積ならば $\sum \Delta x\,\Delta y = \sum f(\Delta x, \Delta y)$ だと思ったのですが，これでないのはなぜですか?

お答え： 円の面積を求める問題でしたっけ? D 上の微小長方形の面積に，その長方形内の点における f の値をかけたものが $f(x,y)\Delta x\,\Delta y$．1 変数関数の定積分で，微小区間の長さに f の値をかけたものの総和をとるのと一緒．

質問： 円を縦横で微小分割して，長方形にして足し集めるとき，はしの誤差をどのように 0 にするのですか?

お答え： 端にまたがっている微小な長方形の面積はどんどん 0 に近づいていく．

質問： 積分と重積分の違いは何ですか．積分では求まらないけど重積分なら求まる値というのがあるということですか．

質問： 重積分と積分のちがいが分からないです．

お答え： 積分（高等学校で学んだ）は一変数関数の積分，重積分は 2 変数関数（多変数関数）の積分．

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx = F(x)$ ならば，この $F(x)$ はかならず C^2-級といえますか?

お答え： 左辺は $\int_a^b \dots dx$ の形をしているので，x を変数として含まない．だから $= F(x)$ と書くのはおかしい．

質問： 重積分の $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ と $\int \left(\int f(x,y)\,dx\right)\,dy$ の違いは何でしょうか．

お答え： 前者はひとつの数ですが，後者は（積分の端点がないので）関数だと思います．

質問： $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ の並び順に決まりはありますか? つまり $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(x,y)\,dy\,dx$ と常に書くことはできますか/ 重積分について $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ と $\iint_D f(x,y)\,dy\,dx$ は必ず等しいですか?

お答え： 等しいです．定義では x, y の役割を別々に考えてはいません．

質問： 面密度から重積分で質量を求めるとき，積分の順序って入れ替えても OK ですか． **お答え：**OK です．

質問： $f(x,y) = xy$, $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2 \leqq 1\}$ だと積分結果が 0 になってしまうとおっしゃっていましたが，第 1, 3 象限が正の立体の体積と，第 2, 4 象限が負の体積が等しくなるからですか?

お答え： 重積分を，f のグラフと xy-平面の間の部分の符号付き体積と考えると，第 1 象限に対応する部分と第 3 象限に対応する部分は同じ体積で符号のみ違う（質問文と比較せよ．述べ忘れたことはないか）．

質問： 受験時代にならったパップスギュルダンが重積分から証明できるという知識はあるが，結局どうやるのかまだわかっていない．どうやるのか． **お答え：**問題 6-3, 6-4, 6-5.

質問： 重積分で面積が求まることがありますか． **お答え：**61 ページ．

質問： 四重積分を使うのはどんな時ですか．

お答え： 4 変数関数の値の何らかの意味での総和を求めるとき．例えば [こんなの] みつけました．

質問： 1 変数関数の定積分ではいわゆる「面積」が求まりますが，重積分では「何」が求まるのか分からない．

お答え： 1 変数関数の積分で求まるのは面積だけではないですよね．質量が求まる状況もあるし，弧長が求まる状況もあるし，確率が求まることもある．「積分は面積」という呪縛からは自由になったほうがよい．多変数でも同様．第 6 回の講義ノートの例をみよ．

質問： 例えば $f(x)$ を x で 2 回積分したいときにも $\iint f(x)\,dx\,dx$ と書いたりするんですか?

お答え： 書きません．できるだけ定積分の形で書くのが誤解を招きません．たとえば，$f(x) = x^2$ のとき，

$$\int_0^x \left(\int_0^t f(u)\,du\right) dt = \int_0^x \left(\int_0^t u^2\,du\right) dt = \int_0^x \frac{t^3}{3}\,dt = \frac{x^4}{4},$$
$$\int_0^x \left(\int_1^t f(u)\,du\right) dt = \int_0^x \left(\int_1^t u^2\,du\right) dt = \int_0^x \frac{1}{3}(u^3-1)\,dt = \frac{x^4}{4} - x.$$

質問： $\int$ が増えた時，たとえば $\int$ が 8 個あるときは，$\int\int\int\int\int\int\int\int$ と書くのですか? それとも 8 個の x の積を x^8 と表せるように，$\int$ もそのような表し方があるのですか?

お答え： $\int^{(8)}$ などとはあまり書かないように思います．$dx_1\,dx_2\,\dots dx_n$ の部分の個数で積分の回数はわかってしまうので，$\int$ と一本だけ書くことも多いし，$\int \dots \int$ などと書くこともあります．

質問： 重積分での式 $\iint f(x,y)\,dx\,dy$ において，なぜ偏微分と同じように ∂x, ∂y と書くのではなく $dx\,dy$ と書くのですか．多変数でも ∂ でなく d を使うのですか．

お答え： 実はこの dx は「全微分」と思うのが自然だからです．x の変化量 Δx の極限だから，と思ってもよいです（全微分は関数の値の変化量の近似とみなせる，講義ノート (3.6) 式参照)．「微分形式」を知っていると， $dx\,dy$ は，全微分 dx と dy のウェッジ積 $dx \wedge dy$ と（ほとんど）同じなのですが，この授業の範囲を超えます．

質問： 重積分で $\iint$ って記号を重ねるのが気に食わない． **お答え：**そうですか．

質問： 直積の $[a,b]\times[c,d]$ の「×」は直積の記号ですか，それとも $3\times 2 = 6$ の「×（掛ける)」記号ですか．「掛ける」なら省略できそうなのですが．

お答え： × の前後にあるものが数ではないので，普通の意味の「掛ける」でないことはすぐわかるはずです．

質問： $\mathit{\Delta}$（デルタ）と $\mathit{\Delta}$（ラプラシアン）はどうやって書き分けたらよいですか?/ $\mathit{\Delta}$ はラプラシアンかデルタか分かるように書き分けますか?

お答え： 山田は書き分けませんが，書き分ける人もいます（Δ, $\mathit{\Delta}$, $\triangle \dots$）．たいていの場合は文脈でどちらの意味かがわかります．文脈で判断できそうもない場合は「ただし $\mathit{\Delta}$ はラプラシアンである」などと付け加えればよいです．

質問： $\mathit{\Delta}$ の記号はデルタといい，ラプラス要素（原文ママ）といい分割といい，使われすぎではありませんか.

お答え： ラプラス要素って何? 一つの文字が何通りの意味でも使われるのはそれほど不自然ではないと思いますが.

質問： 「関数 f の原子関数（原文ママ：原始関数のことか）とは $F'(x) = f(x)$ となる関数 F のことである」とプリントにあります．例えば，関数 g の原子関数（原文ママ）を表すとき，その関数は G とおく（ある関数の原子関数（原文ママ）はそのアルファベットの大文字を用いておく）のが一般的なのでしょうか．そもそも f 以外の文字を使わずに済むように解き方を工夫しろということでしょうか.

お答え： 関数とその原始関数（字を間違えないで!）の文字の関連に関する規則はありません．講義ノートの文は「関数 f の原始関数とは，その導関数が f となる関数のことである」といってもよいのですが,「導関数」という言葉でピンとこない人もいるらしいので，式を書くために F という記号を「一時的に」使いました．この F という文字をなにに変えても同義です：「関数 f の原始関数とは，$\heartsuit'(x) = f(x)$ となる関数 $\heartsuit$ のことである」したがって，f が出てくる文脈で，F をその原始関数の意味で使いたいのであれば，そのことを明示する必要があります.

質問： 陰関数定理がプラクティカルというのはどんな意味ですか.

お答え： 陰関数定理からでてくるプラクティカルな公式，といったはずで，ご質問の文言とはすこし違いますが「辞書を引け」: *practical* (adjective): relating to what is real rather than to what is possible or imaged; appropriate or suited for actual use (Merriam-Webster English Dictionary)

質問： 定義 4.5 で dF をなぜ行列で表すのか分かりません． **お答え：**命題 4.6, 4.9 を行列の積，逆行列で表したい.

質問： 合成関数の微分公式を使って求められる $\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -1$ という公式に名前はついていますか?

お答え： 知らないです.

質問： 順番的には積分の後に微分の考え方が生まれたのだと思いますが，どのような経緯で微分がうまれたのですか（物理?） **お答え：**一義的ではない．[Newton] ([これ] ではない) は物理の気分が強かったような気もするが [Leibniz]（[これ] ではない) はそうでもないと思う.「近似」の考え方は重要.

質問： 積分がギリシャ時代からあったとききましたが，微分の考え方はいつごろからあったのですか.

お答え： 萌芽は 12 世紀くらいと思われる（山田は曖昧にしか知らない)．形をある程度はっきりさせたのは Newton, Leibniz だと思う.

質問： 定積分が重要ってことは，微分と積分は積分から先に生まれたんですか? **お答え：**といいませんでしたっけ.

質問： 高校では微分の逆演算として関数の積分を計算していた．積分しかなかった時代では，そのような演算は行われていたのか． **お答え：**いいえ．微分の逆演算で積分が求まるのは,「微積分の基本定理」(定理 5.11）というハイ・テクノロジーがあるからで，これはたぶん [Newton] や [Leibniz] によるのだと思います.

質問： 「円周率をひもを使って測定しようとするのは難しい．なぜなら曲線の長さに微分が関わっていて，ちょっとしたずれでかなりの誤差が生じてしまうから」とあったが，なぜ微分がからむとそんなに値が換わってしまうのか?

お答え： 例えばの話：$n = 1, 2, \dots$ に対して $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin nx$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフの長さは n によらず一定で，3.8 以上（積分における原始関数は初等関数で表せない)．ここで $n \to \infty$ とすると曲線 $y = f_n(x)$ は長さ π の線分に近づく．すなわち，線分にいくらでも近い曲線で，長さが線分の長さよりずっと大きいものが存在する.

質問： 円周率の導き方を習った覚えがありません．教えていただきたいです.

お答え： 小学校ではどう教わりましたか? 天下り? 解析的な求め方の一例は講義ノート 9 ページ.

質問： 定理 4-12 で「(α, β) の近くで」の部分がとてもあいまいに感じます.

お答え： 講義ノート 45 ページでは曖昧にしていない．これではむしろ分かりにくいので黒板では曖昧に書いた.

質問： 接線の傾きで分数の形にしてしまうのは，0 を分母にしてしまうおそれがありませんか?

お答え： （文脈を想像すると）陰関数定理の仮定はなんですか? それが成り立つところでやったはず.

質問： 7 月 10 日の授業で $F(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1$ について $F(x, y) = 0$ を $y = -\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}$ としていたが y は 2 上により，y について解けないのではないか.

お答え： 「考えている点 (α, β) の近くで $F(x, y) = 0$ を満たす点の集まりは関数のグラフ $y = \varphi(x)$ の形に表せる」の「(α, β) の近くで」を読み落としていませんか?

質問： 陰関数定理に関する板書に「X は $y = \varphi(x)$ とグラフ表示される」とありましたが，なぜ「X は $y = \varphi(x)$ であ

る」と書かないのでしょうか．後者の表現に問題はありませんか．

お答え： 問題はあります．X は集合で $y=\varphi(x)$ は式．同じ種類のものではない．「X は $y=\varphi(x)$ のグラフである」なら文としては正しい．この文脈では「点 (α,β) の近くでは X は $y=\varphi(x)$ のグラフ」なら正しい．

質問： 式をもとにグラフを書いてみたのですが，レムニスケートの概形は下図で合っていますか（図省略）

お答え： 問題 4-9 の $a=0$ の場合．

質問： なめらかな曲線が結局よく分からなかった/ 「なめらかな曲線」の定義はないのですか?

お答え： 講義ノート 46 ページを見よ．

質問： 陰関数の微分について，$F(x,y)=0$ で $\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi''(x)=\dots$（略） の求め方が分からない．

お答え： 問題 4-8 ですね．ヒントが講義ノートの解答例の部分にあがっていますので，ご覧ください．

質問： $d(G\circ F)(\boldsymbol{x})=dG\big(F(\boldsymbol{x})\big)dF(\boldsymbol{x})$ になる理由．

お答え： $\boldsymbol{x}=(x,y)$，$F(x,y)=\big(u(x,y),v(x,y)\big)$，$G(u,v)=\big(\xi(u,v),\eta(j,v)\big)$ とすると $G\circ F(x,y)=\big(\xi(u(x,y),v(x,y)),\eta(u(x,y),v(x,y))\big)$．そこで $d\big(G\circ F\big)(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{pmatrix}$ の各成分を chain-rule で計算する．

質問： 昔は計算資源を節約しようとしたと説明がありましたが「計算資源」とは何ですか? 計算で消費しそうなものとしては紙，インク，時間，やる気が思い浮かんだのですが．

お答え： 「電子計算機」で，というのを言いおとしただろうか．CPU 時間, 消費電力, 使用メモリ．全て有限のリソース．

質問： 今年の東工大入試数学 $\boxed{3}$ は少し重積分の話に踏み込んでいるのか?

お答え： もちろん 1 変数関数の問題ではありますが，重積分とその変数変換，さらに応用としてガウス積分の値を求めるというストーリーの一部を切り出したもの．

質問： コンパクト性とコンパクト集合という概念が新しく見えるので次の授業で群しく（原文ママ：詳しくのことか）やってほしい．

お答え： あまりきちんとはやりません．この科目の範囲でしたら「有界閉集合」と同義で，境界を含む円板や，境界を含む長方形を想像しておけばよい．

質問： 講義と演習を分けていると考え方のしくみを理解したと思っても，解けなかったりするので，単に問題を解くという関点（原文ママ：観点のことか）からするとまとめてやった方が効率的な気がするのですが，分けているのは 1 つの問題にとらわれず，想像力の向上を目的としているからなのでしょうか．

お答え： 山田の考えでは想像力ではなく言葉の使い方です．受験をするわけではないので，問題が解けることが最終目標ではありません．理論の理解具合を問題で確かめるということだと思います．

質問： $\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$ がどういう意味なのか分からなかった（p. 44） **お答え：**講義資料 8, 33 ページ，8 行目．

質問： 重積分って何に役立つのですか? **お答え：**講義ノート 58 ページの例では不満?

質問： 値域と像の違いがよくわかりません．「x が関数 f の定義域全体を動くとき，値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の像とする」とあるのですが，値域の中のどの部分が像となるのですか? また，$\cos^{-1}x$ の像は $[-\pi,0]$ ではいけないのですか?

お答え： 前半：講義資料 8, 3 ページ一番下の質問と回答は読みましたか．後半：ご質問のように $\cos^{-1}$ を定義しても理論上は問題はありません．ただ，標準的な定義とは違うので，人とコミュニケーションをとるときにいちいちそのことを断る必要があります．

質問： 積分不可能な関数を教えて下さい． **お答え：**例 5.2.

質問： 重積分を使った応用問題にはどのようなものがありますか． **お答え：**58 ページの下，問題 5-7, 第 6 回．

質問： $y=0$ は連続関数ですね $\dots 0$ のときどうなるのですか．これの原始関数ってどんなんですか? $\int 0\,dx$?

お答え： 関数 $f(x)=0$ の原始関数の一つは $F(x)=0$．理由：F を微分してみればすぐにわかる．

質問： [これ] を積分するのが重積分? **お答え：**図がよくわかりません．どの部分のことを指しているのでしょうか．

質問： プリントの ∼:=∼ のコロンはどういう意味ですか．

お答え： 講義ノート 5 ページ脚注 17，と講義資料 6 の 6 ページ，27 行目で述べている．

質問： はしの誤差をどのように 0 にするのですか． **お答え：**なにの端におけるなにの誤差?

質問： 偏微分で $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ がどうなるのかが分かりません． **お答え：**文脈ゼロではわかりません．

質問： 安くて栄養がある食べ物を教えて欲しいです． **お答え：**「栄養」とは何？エネルギのことでしょうか．