微分積分学第一 中間試験 〔問題 1〕

注意事項

- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解することができるように書いてください.
- 解答用紙の裏面・余白は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は 7 月 21 日の授業にて返却いたします. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** に預けますのでそちらで受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 7 月 21 日の授業終了後に申し出て頂くか, 7 月 24 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{6}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい. [20 点]

$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)=(x+y)\tan^{-1}(x-y)$ の偏導関数をすべて求めると $\boxed{1}$, 2 次偏導関数をすべて求めると $\boxed{2}$ である. 時刻 $t=0$ で点 $P=(0,0)$ を通る直線（運動）

$$(*) \qquad \bigl(x(t),y(t)\bigr)=(at,bt) \qquad (a,\ b \text{ は定数で } (a,b)\neq(0,0))$$

に対して $F(t):=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ とおくと, $F(t)$ の $t=0$ における微分係数は $\boxed{3}$, 2 次微分係数は $\boxed{4}$ と a, b を用いて表される. とくに $\boxed{4}$ が正になるのは a, b が $\boxed{5}$ をみたすときで, このとき $F(t)$ は $t=0$ で $\boxed{6}$ (“極大値” または “極小値” が入る) をとる.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{5}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい. [15 点]

正の数 a に対して $g(a):=\displaystyle\int_0^a \sqrt{1+x^2}\,dx$ とおく. いま $x=\sinh u$ なる置換を行うと,

$$g(a)=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}} \boxed{3}\,du=\boxed{4}$$

を得る. ただし $\boxed{4}$ には a の具体的な式が入る. したがって $\displaystyle\lim_{a\to+\infty}\frac{g(a)}{a^2}=\boxed{5}$ である.

問題 C 次の関数 $f_1\sim f_4$ について, 例にならって解答用紙の表を○, ×で埋め, $*$ 印の部分の理由を述べなさい. (例) f_j の行の “連続” の列には f_j が連続なら○, 連続でないなら×を入れる. [25 点]

$$f_1(x,y)=x^2+y^2 \qquad f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases} \qquad f_4(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}+\dfrac{x-y}{2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

	連続	偏微分可能	微分可能	C^1-級
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				$*$

解答は解答用紙の表（ひょう）に記入すること.

裏面につづく

問題 D 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{14}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [40 点]

$\xi\eta$ 平面の領域 $\widetilde{D} = \left\{(\xi,\eta) \,|\, \xi > 0, -\frac{\pi}{2} < \eta < \frac{\pi}{2}\right\}$ 上で定義された関数

$$x = x(\xi,\eta) := \xi \sec\eta, \qquad y = y(\xi,\eta) := \xi \tan\eta \tag{1}$$

を考えると，対応 $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$ は $\widetilde{D}$ と xy 平面の領域 $D = \left\{(x,y) \,|\, x^2 - y^2 > 0, x > 0\right\}$ の 1 対 1 の対応を与える．とくに，(1) は

$$\xi = \xi(x,y), \qquad \eta = \eta(x,y) \tag{2}$$

と ξ, η について解くことができる．

いま (1) の $x(\xi,\eta)$ の偏導関数は $\boxed{1}$，$y(\xi,\eta)$ の偏導関数は $\boxed{2}$ であるから，(2) の $\xi(x,y)$ の偏導関数を ξ, η の式で表すと $\boxed{3}$, $\eta(x,y)$ の偏導関数を ξ, η の式で表すと $\boxed{4}$ となる．

ここで，D 上で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

$$\tilde{f}(\xi,\eta) = f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr) \tag{3}$$

と定めると，偏導関数 f_x, f_y の $\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)$ における値は，$\tilde{f}$ の偏導関数を用いて

$$f_x = \boxed{5}\,\tilde{f}_\xi + \boxed{6}\,\tilde{f}_\eta, \qquad f_y = \boxed{7}\,\tilde{f}_\xi + \boxed{8}\,\tilde{f}_\eta$$

と書ける．ただし $\boxed{5}$ ～ $\boxed{8}$ は ξ, η の具体的な式が入る．さらに $f_{xx} = \boxed{9}$, $f_{yy} = \boxed{10}$ なので，f_{xx}, f_{yy} を $\tilde{f}$ の 2 階までの偏導関数を用いて表すと $f_{xx} - f_{yy} = \boxed{11}$ となる．

最後に偏微分方程式

$$f_{xx} - f_{yy} = 0 \tag{4}$$

を考えよう．(4) をみたす f に対して (3) で定めた $\tilde{f}$ が $\tilde{f}(\xi,\eta) = F(\xi)$ と ξ のみの関数となっているならば $F(\xi) = \boxed{12}$ となるので，対応する f は $f(x,y) = \boxed{13}$ となる．同様に $\tilde{f}(\xi,\eta) = G(\eta)$ と η のみの関数となっているならば，$G(\eta) = \boxed{14}$ である．

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切関係ありません．

おつかれさまでした ♡

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–2: 各 5 点, 3–4:5 点, 5–6:5 点

1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \tan^{-1}(x-y) + \frac{x+y}{1+(x-y)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \tan^{-1}(x-y) - \frac{x+y}{1+(x-y)^2}$$

2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(1-2xy+2y^2)}{\left(1+(x-y)^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2(x^2-y^2)}{\left(1+(x-y)^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2(1-2xy+2x^2)}{\left(1+(x-y)^2\right)^2}.$$

3	4	5	6
0	$2(a^2-b^2)$	$\lvert a\rvert > \lvert b\rvert$	極小値

計算スペース（採点の対象にはしません）

修正： 1 の f_y: 符号修正 (Ver. 2)

2: 4 つ（または 3 つ）が正解で初めて 5 点.
記号の誤りは不正解．たとえば $\frac{\partial f}{\partial x \partial y}$.
1 が不正解で，そこからはじめて正しく 2 を計算しているときは正解にしていることがある．
簡単な書き間違いと思われるものには目をつぶっているたとえば f_{yy} の分子が $-2(1-2xy+2y^2)$ となっているが f_{xx} が正しく計算されているなら，とりあえず「正解」にしている．

4: 2 の（誤った）解答から導かれる式は正解にしている．

5: 4 の（誤った）解答から導かれる式は正解にしている．なお a, b が正の数とは限らないことに注意．

6: 「極大値」と答えた方が複数．$F'(0)=0$, $F''(0)>0$ なら極小では？(高等学校ではそう習った）もちろん「門前払い」

満点は 33 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–3:5 点，4–5:各 5 点

1	2	3
0	$\log\left(a+\sqrt{a^2+1}\right)$	$\cosh^2 u$

4	5
$\dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2+1}+\log(a+\sqrt{a^2+1})\right)$	$\dfrac{1}{2}$

計算スペース（採点の対象にはしません） 今回はかなり甘くつけています．1–3 に誤った解答を書いた場合，それにしたがって積分した結果が正しければ 4 を正解にしています．また，4 が正しいと仮定したときにただしく極限値が取れていれば 5 を正解にしています．

1–2: 1 に $\sinh^{-1} 0$ と書いた方が 1 名，2 を $\sinh^{-1} a$ と書いた方は多数．
2 の $\sinh^{-1} a$ は今回正解にしました．ただし，これを対数を用いた形で書き直すこともできて欲しいので，定期試験に出題する場合は “対数関数を用いて” や “逆双曲線関数を用いないで” などの文言を付けることを検討しています．
1 の $\sinh^{-1} 0$ は不正解.「$\sinh x$ は奇関数なので $\sinh 0 = 0$」という「常識的な」知識がないとみなしたからです．

3: $\cosh u$ とした方多数．置換積分法の公式（高等学校数学 III）を忘れたか．
$\cos^2 hu$ とした方 4 名．他の計算をみるかぎり $\cos hu$ と誤解しているものではないと思いますが，講義ノートなどで 2 乗の位置を確認してください．
“$\cosh^2 x$” が 2 名．迷いましたが，不正解にしました.「置換積分法」で置換前と同じ文字を使うということはありえないと思いましたので．
ちなみに，この関数を積分するには次の関係式を使えばよいでしょう：$\cosh^2 u = \frac{1}{2}(\cosh 2u + 1)$．(Ver. 2: cos → cosh)

4: 2 倍角の公式 $\sinh 2u = 2\cosh u \sinh u$ と $\cosh u = \sqrt{1+\sinh^2 u}$ を用いれば式は簡単にできそう．もっと簡単にできる式変形を途中で止めている方が多く見られました．合っていれば正解にしましたが，これも式変形をなるべく促すような出題方法を検討します．

5: $\frac{\log(a+\sqrt{a^2+1})}{a^2} = \frac{\log(1+\sqrt{1+1/a^2})+\log a}{a^2} \to 0.$

満点は 20 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：各行 5 点，*の説明 5 点.

	連続	偏微分可能	微分可能	C^1-級
f_1	○	○	○	○
f_2	○	×	×	×
f_3	×	○	×	×
f_4	○	○	○	* ×

*の理由 以下 f^4 を f と書く（Ver. 2: この行を追加）

$$f_x(x,y) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{2} & \bigl((x,y)\neq(0,0)\bigr) \\ \dfrac{1}{2} & \bigl((x,y)=(0,0)\bigr) \end{cases}$$

である．ここで

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{1}{2n\pi}, 0\right) \quad \text{とすると} \quad \lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (0,0)$$

であるが，

$$f_x(x_n, y_n) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \to -\frac{1}{2} \qquad (n\to\infty)$$

となり，極限値が $f_x(0,0)$ と一致しないので，f_x は連続でない．

計算スペース（採点の対象にはしません）

問題 C f_2 のグラフは xz 平面上の曲線 $z=|x|$ を z 軸に関して回転させて得られる回転面.
理由の説明の部分で，次の議論は誤り：

- $f_x(0,0)\neq f_y(0,0)$ なので偏導関数は連続でない.（たいていの関数では f_x と f_y の値が異なる）
- f_x を極座標で表示して “θ によって値が変わるから” （たいていの関数は極座標で表すと θ に依存する）
- f_x の $(x,y)\to(0,0)$ としたときの値と $f_x(0,0)$ が一致しない（存在するかどうかわからない（実際存在しない）値と他のものを比較するのはナンセンス）
- 偏導関数が連続でないから（定義をコピーしているが，この場合なぜ連続でないかを示す必要がある）

2 変数関数なので f' という記号，導関数という用語はおかしい.
満点は 2 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 1–2：5 点，3–4：5 点，5–8：5 点，9–11：各 5 点，12–13：5 点，14：5 点

1

$$x_\xi = \sec\eta,\ x_\eta = \xi\sec\eta\tan\eta$$

2

$$y_\xi = \tan\eta,\ y_\eta = \xi(1+\tan^2\eta)$$

3

$$\xi_x = \sec\eta,\ \xi_y = -\tan\eta$$

4

$$\eta_x = -\frac{\sin\eta}{\xi},\ \eta_y = \frac{1}{\xi}$$

5

$$\sec\eta$$

6

$$-\frac{\sin\eta}{\xi}$$

7

$$-\tan\eta$$

8

$$\frac{1}{\xi}$$

9

$$\sec^2\eta\,\tilde f_{\xi\xi} - \frac{2\tan\eta}{\xi}\tilde f_{\xi\eta} + \frac{\sin^2\eta}{\xi^2}\tilde f_{\eta\eta} - \frac{\tan^2\eta}{\xi}\tilde f_\xi + \frac{1}{\xi^2}(\cos\eta\sin\eta+\tan\eta)\tilde f_\eta$$

10

$$\tan^2\eta\,\tilde f_{\xi\xi} - \frac{2\tan\eta}{\xi}\tilde f_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi^2}\tilde f_{\eta\eta} - \frac{\sec^2\eta}{\xi}\tilde f_\xi + \frac{\tan\eta}{\xi^2}\tilde f_\eta$$

11

$$\tilde f_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\tilde f_\xi - \frac{\cos^2\eta}{\xi^2}\tilde f_{\eta\eta} + \frac{\cos\eta\sin\eta}{\xi^2}\tilde f_\eta$$

12

$a\log\xi + b$ (a, b は定数)

13

$a\log\sqrt{x^2-y^2} + b$ (a, b は定数)

14

$a\log\dfrac{1+\tan\frac{\eta}{2}}{1-\tan\frac{\eta}{2}} + b$ (a, b は定数)

(Ver. 2: 配点変更/4 番 sec → sin; 符号変更)

ξ を ε と書いた方は答案を見ていません.（講義資料 8 (7 月 7 日分) の 4 ページを参照せよ） 満点は 1 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 中間試験 〔解答用紙 5〕

この用紙も回収します

問題 E [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2015 年度入学の方は，学籍番号のうち "15_" を除いた番号の席に着席してください．
- 2015 年度以前入学の方はご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- **解答用紙 5 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	