

微分積分学第一講義資料 13

お知らせ

- 7 月 24 日にご提出いただいた提出物への対応は都合により 7 月 31 日になります。ご了承ください。
- 明日, 7 月 29 日 (水曜日) の演習は中止いたします。
- 授業評価へのご協力お願いいたします。7 月 26 日 8 時 30 分現在 28/114。目標 90/114。

前回までの補足

いくつかの積分計算のやりかたが分からないというご質問をいただきました。

7 月 24 日の講義の最初で紹介した例： 重積分

$$\iint_E \frac{x^5 y^2}{(1+x^6)^2} dx dy; \quad E = \{(x, y) | x^3 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$$

は x で先に積分すると比較的容易に計算できるが, y で先に計算すると難しい, という話をしたところ, そちらの積分を試みて, うまくできなかった, というご意見をいただきました。やってみましょう:

$$\begin{aligned} \iint_E \frac{x^5 y^2}{(1+x^6)^2} dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{x^3}^1 \frac{x^5 y^2}{(1+x^6)^2} dy \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^5(1-x^9)}{(1+x^6)^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^5}{(1+x^6)^2} dx - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{x^{14}}{(1+x^6)^2} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{1}{6u^2} du - \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{v^4}{3(1+v^2)^2} dv \quad (u = 1+x^6, v = x^3) \\ &= -\frac{1}{18} \left[\frac{1}{u} \right]_1^2 - \frac{1}{9} \int_0^1 \frac{v^4 + 2v^2 + 1 - 2v^2 - 2 + 1}{(1+v^2)^2} dv \\ &= \frac{1}{36} - \frac{1}{9} \left(\int_0^1 dv - \int_0^1 \frac{2dv}{1+v^2} + \int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{36} - \frac{1}{9} + \frac{2}{9} [\tan^{-1} v]_0^1 - \frac{1}{9} \int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^2} \\ &= -\frac{1}{12} + \frac{\pi}{18} - \frac{1}{9} \int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^2} \end{aligned}$$

ここで, 最後の積分を計算しよう。部分積分の公式から

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} &= \int_0^1 \frac{dv}{1+v^2} = \int_0^1 \frac{v' dv}{1+v^2} = \left[\frac{v}{1+v^2} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{2v^2 dv}{(1+v^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{(2v^2 + 2 - 2) dv}{(1+v^2)^2} = \frac{1}{2} + 2 \int_0^1 \frac{dv}{1+v^2} - 2 \int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 \int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^2} \end{aligned}$$

なので

$$\int_0^1 \frac{dv}{(1+v^2)^2} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}.$$

これらをまとめて、積分の値は $\frac{\pi}{24} - \frac{1}{9}$.

講義ノート 63 ページ, 例 6.4 ここに現れる積分の計算はかなり難しいですね. 正の数 a に対して

$$\int_0^1 \sqrt{t^2 + a^2} dt = \frac{1}{2} (a^2 \log(1 + \sqrt{a^2 + 1}) - a^2 \log a + \sqrt{1 + a^2})$$

という公式を用意します. これは $t = a \sinh v$ と置換するか (本質的には同じですが) $v = \log(t + \sqrt{t^2 + a^2})$ と置換することにより得られます. これを適用すると,

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2+y^2} dx = \frac{1}{2} \left((1+y^2) \log(1 + \sqrt{y^2+2}) - (1+y^2) \log \sqrt{1+y^2} + \sqrt{y^2+2} \right)$$

これをもう一度 y について積分すれば結論が得られますが, \log を含む項の積分は「部分積分法」の公式を用いて, \log を消して求めます (次回の講義資料に詳細を書きましょう.)

前回までの訂正

- 講義資料 12, お知らせの 5 行目: 「数学事務室 (本館 3 階 332B) にて返却します .」を削除 .

授業に関する御意見

- 授業中に先生がすごく動いていることに気づきました . 山田のコメント: いまごろ?
- スライドで授業をやると黒板よりも鮮明に字が見えて良い感じだと思います . 山田のコメント: そうですね? ライブ感が損なわれませんか?
- 行列式 = 面積を始めて知りました . 山田のコメント: そうですね. 次回もう少し詳しくコメントしましょう .
- 行列式が面積を表すことを説明していた先生のジェスチャーがかわいかった . 山田のコメント: そうなのか .
- 雷ちゃんかわいい . 山田のコメント: そう?
- 雷がうるさすぎてよく聞こえませんでした . / 雷で聞こえなかったです . / 雷の音で全然聞こえなかったですね . / 雷うるさかった / 雷で何も聞こえません (by anonymous) 山田のコメント: Sorry. 次は気をつけます .
- ホラー映画 ([画像]) / 雷ゴロゴロ ([画像]) (by anonymous)
- 雷がうるさくてハイになってました . / 授業より雷でテンションあがっておもしろいです . / 雷の音聞いていると妙にテンション上がりますよね . / 雷がなっている時ってテンション上がります . 山田のコメント: そうだよ .
- 雷がやばかったです . 山田のコメント: この場合の「やばい」の意味は?
- カミナリ怖いお/かみなりはこわいです . / かみなりこわいよ > < ぶええ/ 雷怖かったですね ([画像]). 山田のコメント: ですか .
- 「この授業は雨が降る前からやっています (ズドン!)」ゼウスの友達か何か? 山田のコメント: いまは違う .
- 雷を何とかしてください . 山田のコメント: いまは友達じゃないから .
- 雲の向こうに歩いていこう . 雨のあとには虹がかかる . 山田のコメント: 雲の向こうってどっち側?
- 娘さんはいますか? 山田のコメント: はい .
- 先生は酸性雨がよく降るところのご出身ですか . 山田のコメント: 関東なので結構降るような気がする .
- 家で置換すると変にとらえられてしまうのですが知漢 (原文ママ) の語源ってなんでしょうね . 山田のコメント: 「痴漢」です . 「漢」の訓読みは「おとこ」 .
- 彼女が欲しいです (切実) . 金も欲しいです . 山田のコメント: そうですね .
- お気に入りの動画が has been deleted でした . 僕はこれからどうしたらいいのでしょうか . 山田のコメント: 境界条件が明らかでないのでお答えしようがありません .
- 期末はがんばります . / テスト頑張ります . 山田のコメント: そうしてください .
- 今日のは理解できた . 山田のコメント: OK
- わかりやすいです . 山田のコメント: そう?
- 光ちゃん! 山田のコメント: はいはい
- 特になし/なし 山田のコメント: me, too.