2015 年 7 月 31 日

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一講義資料 14

お知らせ

- 今回で前期「微分積分学第一」の講義は終了です．ご聴講ありがとうございました．
- 定期試験の問題にて「週 2 回講義」についてのご意見を聞きます．ぜひご回答ください．
- 定期試験範囲を「主として 7 月 31 日までの講義内容」としましたが，主に前回までの内容とします．
- 授業評価へのご協力お願いいいたします．7 月 30 日 15 時 30 分現在 30/114．目標 90/114．

前回までの訂正

- 提示資料 12 (7 月 24 日)，7, 8 ページ：例 6.2 ⇒ 例 6.1
- 提示資料 12 (7 月 24 日)，7, 8 ページ：D' の面積 $= \iint_D dx\,dy \Rightarrow D'$ の面積 $= \iint_{D'} dx\,dy$
- 黒板の 4 番が 2 つあったそうです．

質問と回答

質問： 重積分の考え方（第 5 回）の中では，閉区間 $[a, b]$ の分割 Δ の幅が書いてあったんですが，$|\Delta| = \max\{|x_1 - x_0|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$ なぜ Δx_i $(i \in \mathbb{N})$ の max でなければならないのですか． **お答え：**「分割をどんどん細かくする」ことを，「$|\Delta| \to 0$」と書きたい．これは最大の幅が 0 に近づくこと．

質問： 重積分の計算で式を $\int dy \int dx$ と $\iint dx\,dy$ とすることの違いは何かありますか． **お答え：**後者が重積分．前者は「累次積分」．x で積分して，その結果を y で積分する，という重積分の「計算法」．

質問： 演習で $\int_c^d \int_a^b dx\,dy$ と書いたら×になったのですがなぜですか? **お答え：**文脈が不明なのでお答えできません．

質問： 重積分において，変数の片方を固定してもう片方の変数について積分するという操作は，図形的にどんなものをイメージすればいいんですか? それとも何も考えずに機械的にやり方を覚えたしまうがいいですか?

お答え： 終わりの部分，文が変ですが，x 座標が x から $x + \Delta x$ までの範囲の細い帯での $f(x, y)\,\Delta x\,\Delta y$ の総和（これが x をとめて y に関して積分したもの）を x を動かして総和を取る，という説明を 7 月 14 日ころにしました．

質問： どの変数から積分するかって，やっぱり計算のしやすさとか考慮するんですよね． **お答え：**と最初に説明した．

質問： $D : z^2 \leqq 4x,\ y^2 \leqq x - x^2$, $\iiint_D dx\,dy\,dz$ の問題，先生は z から積分してましたが y からやってもいいですか? (どっちが楽ですか) **お答え：**6 通りの計算を，全部やってごらんなさい，と講義の際に言いましたよね．

質問： $D = \{(x, y, z)\,|\,x^2 + y^2 \leqq 1, y^2 + z^2 \leqq 1\}$ で D の体積 $\iiint_D dx\,dy\,dz$ を求めたいのですが，たとえば x, y を固定すると $-\sqrt{1 - y^2} \leqq z \leqq \sqrt{1 - y^2}$, $-\sqrt{1 - x^2} \leqq z \leqq \sqrt{1 - x^2}$ となり，z の範囲が複雑になります．うまく D の体積を重積分で求める方法はありますか． **お答え：**x, y を固定すると，2 番目の式はでてこないのでは?

質問： $\iint f(x)\,dx\,dy$ は $\int dx \int f(x)\,dy$ と書いても同じですか? **お答え：**積分範囲がないので，判定できません．

質問： 大学入試数学で xyz 空間における図形の体積を求める問題では，解法に「$z = t$ の平面における切断面の面積 $S(t)$ を t について定積分することで求める」というのが定石でした．これは「z を固定して $S(t)$ を求め，次に z を動かす」という点で重積分（累次積分）と本質的には同じことをしていたのでしょうか．

お答え： そのとおり．「受験数学」でなく教科書にありますね．その考え方を用いて錐の体積を求めたものでした．

質問： 三変数の重積分では，(x, y, z として) まず 2 つを固定して，のこりの一つで積分すると思っていました．しかし $D\{(x, y, z)|x^2 + y^2 \leqq 1, y^2 + z^2 \leqq 1\}$ （原文ママ，“$D = \dots$” か?）$\iiint_D dx\,dy\,dz$ でまず Y を固定して，といったときに (?) となってしまいました．そこは「面」を集めたという考えかたでよいのでしょうか．

お答え： y の他にもうひとつ (x でも z でもよい) 固定して，順番にやっていっても同じ答えになります．実際にやってみるとご質問のような計算と同じ結果になるのもわかるはず．

質問： $D=\{(x,y,z)\,|\,z^2\leqq 4x, y^2\leqq x-x^2\}$ の 3 変数関数での $|D|=\iiint_D dx\,dy\,dz$ は体積だった．では 4 変数関数での D は何を意味しますか?

お答え： 「D は」ではなんとも言えない．D での 1 の四重積分は，D の「4 次元体積」(をこの積分で定義する）です．

質問： P. 62 曲面の面積で，いきなり $[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ 上のグラフで平行四辺形に近いと書いてあったのですが，どう考えれば微小領域でそのようにみなせるのかわかりません．

お答え： (x,y), $(x+\Delta x,y)$, $(x,y+\Delta y)$, $(x+\Delta x,y+\Delta y)$ に対応するグラフ上の 4 点は，講義ノート 32 ページの近似式を用いれば $P=\big(x,y,f(x,y)\big)$，$Q=\big(x+\Delta x,y,f(x+\Delta x,y)\big)\fallingdotseq\big(x+\Delta x,y,f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x\big)$, $R=\big(x,y+\Delta y,f(x,y+\Delta y)\big)\fallingdotseq\big(x,y+\Delta y,f(x,y)+f_y(x,y)\Delta y\big)$, $S=\big(x+\Delta x,y+\Delta y,f(x+\Delta x,y+\Delta y)\big)\fallingdotseq\big(x+\Delta x,y+\Delta y,f(x,y)+f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y\big)$ となる．$[x,x+\Delta x]\times[y,y+\Delta y]$ に対応するグラフ上の部分は，この 4 点を頂点とする四角形に近いが，

$$\overrightarrow{PQ}\fallingdotseq\big(1,0,f_x(x,y)\big)\Delta x,\quad \overrightarrow{PR}\fallingdotseq\big(0,1,f_y(x,y)\big)\Delta y,\quad \overrightarrow{PS}\fallingdotseq\big(1,0,f_x(x,y)\big)\Delta x+\big(0,1,f_y(x,y)\big)\Delta y$$

すなわち $\overrightarrow{PQ}\fallingdotseq\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{PR}$ なのでこの四角形はほぼ平行四辺形である．

質問： 楕円回転体（$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ を x 軸を軸にして一回転）の表面積は $\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy$ で求められますか? **お答え：**f は何にすればよいでしょう．

質問： プリント P 61 の初めで「『微小部分の面積・体積の総和』の極限が面積・体積であること信じて」とあるのですが，厳密に考えた場合は面積・体積と言えないのでしょうか． **お答え：**面積・体積の定義をしていないので，言えるかどうかは確定しません．実際は，積分で面積や体積を定義するのがよいと思います．

質問： D の面積を求めるとき $\iint_D dx\,dy$ とするのは D の面積の値と，(高さ 1，底面積 D）の立体の体積の値が等しいのを利用して，体積をまず求めるからですか? たとしたら，求めているのは面積ではなく，本質的には体積であるということですか? **お答え：**体積である，と思うのは筋が悪いと思います．微小長方形の面積 $\Delta x\,\Delta y$ の総和の極限が考えている図形の面積であり，定数関数 1 の積分でもある，というだけです．

質問： xy 平面上の領域 D について，$\iint_D dx\,dy$ は領域 D の面積の値とも $z=f(x,y)=1$ となるような xyz 座標上での立体の体積の値とも等しくなるはずです．ということは $f(x,y)=1$ となっている図形の立体積を求めるときは D の情報に $f(x,y)=1$ を加えないと答えの値が正しくても試験では間違いとみなされるということですか?

お答え： 何をおっしゃっているのかわかりません．具体的にはどういう状況を想像しているのですか? ちなみに「$z=f(x,y)=1$ となるような xyz 座標上での立体」って何のことかわかりませんよね．

質問： 三重積分で立体の体積が求まる理由がわからなかったのでもう一度説明お願いします． **お答え：**$\mathbb{R}^3$ の部分集合 D を，辺が座標軸に平行な微小な直方体に分割して，それらの体積の総和を求めるのが D で 1 を積分すること．

質問： 三重積分で体積を計算する式は $\iint f(x,y)\,dx\,dy=\iiint 1\,dx\,dy\,dz$ (ただし $z=f(x,y)$) ということですか?

お答え： 何の体積か，と積分範囲がないので，判定できません．xy 平面上の面積確定集合 D を含む領域で定義された負でない値をとる連続関数 f に対して $D'=\{(x,y,z)\,|\,x,y\in D, 0\leqq f(x,y)\leqq z\}$ とすると，D' の体積は....

質問： 重積分を使って立体の表面積を求めることは可能でしょうか． **お答え：**はい．講義ノート 62 ページ．

質問： $f(x,y)=1$ のとき $D=\iint_D dx\,dy$ において D は面積であるが（原文ママ）$f(x,y)=xy$ のとき $E=\iint_D xy\,dx\,dy$ において E は何を表す値であるかわからない．体積について考えているのか．

お答え： 前半で同じ D が 2 つの意味で用いられていおかしい．積分範囲 D が第 1 象限や第 3 象限に含まれているときは，グラフ $z=xy$ の下側の部分の体積とも思える．また，面密度 xy である板の質量（講義ノート 58 ページ)．

質問： $f(x,y)=z$ と表される関数のグラフがとじているなら $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ でそのグラフの体積は求められるのですか． **お答え：**(1) 関数のグラフが閉じた曲面を与えることはありません (2) グラフの体積は 0 です．

質問： 偏微分では順序によって値が変わってしまう場合がありましたが，重積分でも順序によって値が変わってしまう場合はありますか? **お答え：**通常は一致します．“広義積分” ではまずい例があるが，この講義では扱わない．

質問： 構義ノート P. 63（原文ママ）の（略，2 行目から 3 行目）の計算がわかりません．導出過程を教えていただけると幸いです． **お答え：**ベクトル積を計算して，その大きさを求めた．漢字は間違えないように．

質問： 置換積分をするとき，何で置換をするか考えると思うのですが，先生はどのように何で置換するかを決めていますか．置換するものによってはすごくややこしくなることがあると思ったので．

お答え： 定石がいくつかありますが（28 日の授業でもひとつやりましたね）試行錯誤です．

質問： 積分ができるように式変形をするにはどうやったら思いつきますか? **お答え：**うまい答をいきなり思いつくわけではありません．定石を知っている上に，試行錯誤．20 種類くらい試してみればうまく行くかもしれない．

質問： 置換積分法を使うとき単調という条件があるとおっしゃっていましたが，ある区間で増減が変わるときは，増加と減少の部分で区間をわけて置換積分法を用いればできますか？（例省略）

お答え： 増加，減少がまざった場合，変数変換前の区間と変換後の区間が 1 対 1 に対応しないので，同じ区間を 2 度以上積分することになり，変換前の積分と同じ値にはならない可能性があります．

質問： $(u,v) \mapsto \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ が 1 対 1 対応していない場合は 1 対 1 に対応するような集合に分けて積分したのちすべて足し合わせればよいのですか． **お答え：**いいえ．例えば $D = \{(x,y) \,|\, 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 4\}$ と $D' = \{(r,\theta) \,|\, 1 \leqq r \leqq 2, 0 \leqq \theta \leqq 4\pi\}$ を考え $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおけば (r,θ) が D' を動くと，(x,y) は D 全体を 2 回覆う．これをわけて足しあわせたら，D 上の積分を 2 回おこなったことになりませんか?

質問： 行列式は，同じ行・列が 2 つ以上あると 0 になりますが，重積分の変数変換をするときに，ヤコビ行列の行列式が 0 になってしまうことはあるのでしょうか.

お答え： 極座標 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ の $r = 0$ のときがそうですね．そういうときは変換が 1 対 1 でなくなる可能性がありますが，ヤコビ行列式が 0 となるので積分には影響を与えなかったりします.

質問： 重積分の変数変換で $\iint dx\,dy$ から $\iint du\,dv$ に変えた後，なぜ det をかけるのか，なぜ det が関係しているのか． **お答え：**7 月 28 日に説明しました．微小長方形の面積比です.

質問： 変数変換でヤコビ行列式の絶対値を使うのはなぜ?

質問： 重積分の変数変換で絶対値になる理由がわからなかったのでもう一回講義してくれませんか.

お答え： 7 月 28 日に説明した．一変数関数の積分では「長さ」に符号を考えられる（$\int_a^b$ は $a > b$ でも意味がある）が，多変数関数の場合は簡単ではない．ここでは，面積には符号をつけないで考えるので，その倍率は負にならない.

質問： 絶対値と行列式の $|\ |$ の記号はどうやって区別するんですか?

お答え： 見た目では区別できないので，文脈で判断する．$|\ |$ の中が行列なら絶対値のわけがない．曖昧に思えるときは，言葉で補足する（“ただし $|\ |$ は行列式を表す” のように).

質問： 今日の積分だったら変換するよりもそのまま積分したほうが早くないですか．/ 今日の積分では置換しないで解いたほうが簡単だとおもいます． **お答え：**両方できれば公式の確認ができませんか?

質問： 3 つの変数を使った重積分で，そのうち 2 つの変数だけを変換することはできますか?

お答え： たとえば (x,y,z) の (x,y) を (u,v) に置き換えることを考えるなら $(x,y,z) = \bigl(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\bigr)$ で $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$ を w に依存しない関数，$z(u,v,w) = w$ とすればよい.

質問： 重積分の変数変換で $x(u,v)$, $y(u,v)$ のとき $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathit{\Delta} u\,\mathit{\Delta} v$ とかけましたが，三重積分で $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ のとき $\left|\det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}\right|$ とかけるのですか?（山田注：主語がないね）/ 重積分の変数変換は 3 変数以上に対しても同様にヤコビ行列式の絶対値を考えることでできますよね． **お答え：**講義ノート 70 ページ.

質問： P. 68 で $F(u,v) = \bigl(x(u,v), y(u,v)\bigr)$ で写した像の面積が $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathit{\Delta} u\,\mathit{\Delta} v$ で表される（近似される）説明をおねがいします． **お答え：**7 月 28 日に説明いたしました.

質問： 変数変換を行う利点が見えませんでした.（例の問題は変換前の方が楽そう)．どのような利点があるのでしょうか? **お答え：**28 日の講義で例を挙げました.

質問： ふつうの置換積分に比べて重積分の方は大変で，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ となり，かなり計算が大変だと思った．置換した方が楽な場合とかの判断ができなさそうでした．これを使えばガウス積分ができるんですか.

お答え： できるんですよ．7 月 28 日の講義.

質問： 重積分の変数変換をうまく何かにたとえるとどうなりますか? **お答え：**例える必要がありますか?

質問： 変数変換をしたときに（中略）$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ をかける理由がいまいち分かりません． **お答え：**いまいちですか.

質問： 微積分においてヤコビ行列の果たす意味はどういうことですか? **お答え：**一つは定理 6.15.

質問： $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ がなぜ $\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ なのかわかりません． **お答え：**$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ の定義がこの行列式.

質問： 重心の問題 (6-3 (2)) の意味は $\sum$ (微小面積) $\times$ (位置)/{(面積)} ということですか? **お答え：**そうです.

質問： 広義積分は極限を使って求めているにもかかわらず，イコールで結んでしまってもいいのですか?

お答え： $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ や $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1$ の左辺は極限をつかって求めますが，高校でもイコールで結んでませんか?

質問： 広義積分が収束するということは，関数が ∞ で何かの値に収束しているということになりますか?

お答え： $[0,\infty)$ で連続な関数 f の広義積分 $\int_0^\infty f(x)\,dx$ が収束するとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ は存在するか，ですか? 答「いいえ」．$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ が反例．この積分は Fresnel 積分といって，光学や量子力学に現れます．値の計算はガウス積分の値と複素変数の正則関数に関するコーシーの積分定理を用います（ので，この授業の範囲を超えます).

質問： $\int_0^1 \log x\,dx$ の値の絶対値は 1 となりますが，これは左図（略，$y=\log x$ のグラフの $0<x\leqq 1$ の部分と x 軸との間に斜線）の面積を求めたことになるのでしょうか？ **お答え：**面積の定義にもよるのでは？ 有界でない図形の面積ですから，定義は自明でないはず．そして，定義するならこの積分の値で定めるのが自然だと思います．

質問： “ガンマ関数” と “ベータ関数” が第 7 回の講義資料で登場しましたが，それぞれギリシャ文字の 3 文字目，2 文字目というのはその名称と関係があるのですか． **お答え：**山田はよく知りません．知っている人おしえて．

質問： $\iint_E \frac{x^5y^2}{(1+x^6)^2}\,dx\,dy$, $E=\{(x,y)\,|\,x^3\leqq y\leqq 1, 0\leqq x\leqq 1\}$ の $x\leqq 1$ の部分はいるんですか？ $x^3\leqq y\leqq 1$，$0\leqq x$ で $x\leqq 1$ はわかる気がするので． **お答え：**そのとおりですね．

質問： 中間試験問題 C f_2 の偏微分可能かどうかについて，$f_2(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)=(a,b)$ において $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=$ (中略；極限を計算している) $=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となり極限値がでます．また x と y の対称性により $\frac{\partial}{\partial y}(a,b)$ (原文ママ) も同様です．それで偏微分可能ではないかと思いました．なぜ偏微分可能ではないかを教えて欲しいです．

お答え： $a=b=0$ のときは偏微分係数が決まらないのでは？

質問： 中間の C(3) が分からない． **お答え：**そうですか．どのへんが？

質問： 2014 年の定期試験では $\varphi(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}+\tan^{-1}x+\tan^{-1}y$, $\varphi(0,0)=0$ の φ_x が質問されたんですけど，これは $\varphi_x(0,0)=$ (略) $=\lim_{h\to 0}\frac{\tan^{-1}h}{h}$ で $\lim_{h\to 0}\frac{0}{0}$ になっちゃうのでロピタルを使ってもいいですか．

お答え： もちろんロピタルが使えます．が，$\varphi_0(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$ とおけば $\varphi_x(0,0)=(\varphi_0)_x(0,0)+(\tan^{-1}x)_x(0,0)$. 第一項は微分の定義から求める必要があるが，第二項は $\tan^{-1}$ の微分公式から直接でますね．

質問： 超ひも理論って十何次元とかって言っていますが，それって積分の限界なんでしょうか．

お答え： いいえ．そのへんの界隈では「無限次元空間での積分」も普通に考えます．

質問： 重積分とは？ **お答え：**講義ノート第 5 回．

質問： 講義ノート p. 65 の線形変換で $L_A\colon \mathbb{R}^2\ni \boldsymbol{x}\mapsto \boldsymbol{X}=A\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2$ の $\boldsymbol{X}$ はどんなものですか．例などが欲しいです． **お答え：**A と $\boldsymbol{x}$ の積ですが，それ以上に何が必要？

質問： 積分の考え方はどのような問題を解決しようとして生まれたのですか？

お答え： 発生からいったら面積や体積や質量の計算でしょうね．だから何だということですが．

質問： 重積分における積分区間被積分関数の対称性というのが分かり辛いです． **お答え：**具体的にどういう状況？

質問： 授業プリントに誤りがないのが誤りです（>__<） **お答え：**そんなことはありません．

質問： ラプラス変換をするメリットは何ですか？ $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ の場合以外にも似たような変換をすることがありますが，メリットがわかりません．$x=r\cosh\theta$, $y=r\sinh\theta$ のとき $\Delta f=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r-\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$．この他にも中間テストの問題 D など． **お答え：**「ラプラス変換」は問題 7-5．ここでは「ラプラス作用素の変数変換」．いい加減で自己流な言葉の使い方をしていると信用を下げます．ちなみに，ご質問の式は間違っていると思います．

質問： $f(x,y)=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$ とおいてそれを次元をふやして 2 乗するという案はどうやって思いついたんですか．

お答え： 何を言っているかわかりません．「次元をふやして 2 乗する」とはどういう操作のことを言っているのですか？

質問： 変数変換をする時は誘導はあるのですか．

お答え： 例えば散歩しているときに「変数変換したい」と思ってもだれも誘導してくれません．

質問： 講義資料 p 69，誤（まずは，第 5 回でやったように計算してみよ）→ 正（まずは，第 5 回でやったように計算してみよう） **お答え：**誤りではありません．命令形です．

質問： ヤコビ行列ってヤコビさんが考えたんですか？ **お答え：**ヤコビさんってどのヤコビさん？

質問： ヤコビ行列の証明が知りたい． **お答え：**ヤコビ行列はただの行列です．それを「証明する」ってどういうこと？

質問： 〓義ノート（山田注：最初の文字は「言偏に義」）の計算省略しすぎ． **お答え：**漢字間違えすぎ．

質問： 体積を求める問題を見た二次元に恋するお友達「三次元ムリ〜」

お答え： だから無限個の 2 次元の図形にわけて，さらに総和をとる．2 次元ラヴにはたまらないでしょ．

質問： 山田教授は酸性雨と雷と積分，どれが 1 番恐いですか． **お答え：**まんじゅう

質問： いつものサスペンダーをつけた先生が見れなくてうち ♡ 悲しいわ ♡ **お答え：**そう．

質問： 中間試験で範囲だった講義ノート 1〜4 は期末試験の範囲になりますか？

お答え： 中間試験の意味（何回か説明した）を考えれば自明と思う．

質問： 微積分の期末試験が気になって，ごはんも美味しく食べられない今日この頃ですが，成績の評価の内訳として，十分に単位がもらえる（中間試験などの成績を考慮しない）場合，期末試験と演習の小テストはそれぞれ何割でしょうか． **お答え：**未定．「足し算をする」ことも非自明．ごはんは美味しく食べてください．大きくなれません．