微分積分学第一 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 解答用紙の裏面・余白は下書き, 計算などに使用して良いですが, 採点の対象とはしません.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学籍番号と氏名を記してください**. 問題用紙は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案・成績報告は 8 月 7 日以降に**数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却します.
- 採点に関する質問・クレイムは, 8 月 17 日までに山田まで電子メイルでお申し出下さい. 管理の都合上, 期日以降のクレイムは, **こちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.
- 成績の根拠はこの試験・中間試験・提出物, および演習における提出物のみです. それ以外は成績判断の材料とはいたしません.

双曲線関数など:

$$\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x},$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \qquad 1-\tanh^2 x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \qquad \cosh^2 x + \sinh^2 x = \cosh 2x, \qquad 2\cosh x \sinh x = \sinh 2x.$$

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{7}$ にもっともよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい. [15 点]

$\mathbb{R}^2$ 上で定義された関数 $f(x,y)=x^4+x^2y^2+x^2-y^2+2y$ の偏導関数をすべて求めると $\boxed{1}$, 2 次偏導関数をすべて求めると $\boxed{2}$ である. とくに, f の偏微分係数がすべて 0 になるのは $(x,y)=\left(\boxed{3},\boxed{4}\right)$ のときである [1]. 時刻 $t=0$ でこの点 $P=\left(\boxed{3},\boxed{4}\right)$ を通る直線 (運動)

$$(*) \qquad \bigl(x(t),y(t)\bigr)=\left(\boxed{3}+at,\boxed{4}+bt\right) \qquad \bigl(a,\ b \text{ は定数で } (a,b)\neq(0,0)\bigr)$$

に対して $F(t):=f\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ とおくと, $F(t)$ の $t=0$ における微分係数は $\boxed{5}$, 2 次微分係数は $\boxed{6}$ と a,b を用いて表される. とくに $F(t)$ が $t=0$ で極大値をとるための条件は $\boxed{7}$ である.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{13}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい. [30 点]

重積分

$$I:=\iint_D \frac{y}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad D:=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1, y\geqq 0\}$$

を累次積分で表すと,

$$I=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\left[\int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}}\frac{y}{1+x^2+y^2}\,dx\right]dy=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\boxed{5}\,dy, \qquad I=\int_{\boxed{6}}^{\boxed{7}}\left[\int_{\boxed{8}}^{\boxed{9}}\frac{y}{1+x^2+y^2}\,dy\right]dx=\int_{\boxed{6}}^{\boxed{7}}\boxed{10}\,dx$$

である [2]. また, 変数変換 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ を施せば,

$$I=\iint_{D'}\boxed{11}\,dr\,d\theta; \qquad D'=\left\{(r,\theta)\,|\,\boxed{12}\right\}$$

と書ける. これらから $I=\boxed{13}$ であることがわかる.

裏面につづく

[1] 問題 A: $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ には数が入る.
[2] 問題 B: $\boxed{5}$, $\boxed{10}$ には左辺 x, y の一方のみを含む式を入れる.

問題 C 次の関数 $f_1 \sim f_3$ について，例にならって解答用紙の表を○，×で埋め，$*$ 印の部分の理由を述べなさい．（例）f_j の行の "連続" の列には f_j が連続なら○，連続でないなら×を入れる． [20 点]

$$f_1(x,y) = \tan^{-1}(x-y), \qquad f_2(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}, \qquad f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases}$$

	連続	偏微分可能	微分可能	C^1-級
f_1				
f_2		$*$		
f_3				

解答は解答用紙の表（ひょう）に記入すること．

問題 D 次の文中の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{13}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい． [35 点]

$\xi\eta$ 平面の領域 $\widetilde{D} = \{(\xi,\eta) \,|\, \xi > 0\}$ 上で定義された関数

(1) $$x = x(\xi,\eta) := \xi\cosh\eta, \qquad y = y(\xi,\eta) := \xi\sinh\eta$$

を考えると，対応 $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$ は $\widetilde{D}$ と xy 平面の領域 $D = \big\{(x,y) \,|\, x^2-y^2 > 0, x > 0\big\}$ の 1 対 1 の対応を与える．とくに，(1) は

(2) $$\xi = \xi(x,y), \qquad \eta = \eta(x,y)$$

と ξ, η について解くことができる．

いま (1) の $x(\xi,\eta)$ の偏導関数は $\boxed{1}$，$y(\xi,\eta)$ の偏導関数は $\boxed{2}$ であるから，(2) の $\xi(x,y)$ の偏導関数を ξ, η の式で表すと $\boxed{3}$, $\eta(x,y)$ の偏導関数を ξ, η の式で表すと $\boxed{4}$ となる．

ここで，D 上で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

(3) $$\tilde{f}(\xi,\eta) = f\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)$$

と定めると，偏導関数 f_x, f_y の $\big(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\big)$ における値は，$\tilde{f}$ の偏導関数を用いて

$$f_x = \boxed{5}\tilde{f}_\xi + \boxed{6}\tilde{f}_\eta, \qquad f_y = \boxed{7}\tilde{f}_\xi + \boxed{8}\tilde{f}_\eta$$

と書ける．ただし $\boxed{5}$～$\boxed{8}$ は ξ, η の具体的な式が入る．さらに $f_{xx} = \boxed{9}$, $f_{yy} = \boxed{10}$ なので，f_{xx}, f_{yy} を $\tilde{f}$ の 2 階までの偏導関数を用いて表すと $f_{xx} + f_{yy} = \boxed{11}$ となる．

最後に偏微分方程式

(4) $$\Delta f = f_{xx} + f_{yy} = 0$$

を考えよう．(4) をみたす f に対して (3) で定めた $\tilde{f}$ が $\tilde{f}(\xi,\eta) = F(\xi)$ と ξ のみの関数となっているならば $F(\xi) = \boxed{12}$ となるので，対応する f は $f(x,y) = \boxed{13}$ となる．

問題 E 問題 E への回答は成績に一切関係ありません． [0 点]

(1) 週二回，半学期の授業についての感想，ご意見をお書きください．

(2) なにか言い残すことがありましたらお書き下さい．

おつかれさまでした ♡

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–4, 5–6, 7: 各 5 点

1

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy^2 + 2x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y - 2y + 2.$$

2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y^2 + 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 - 2.$$

3	4	5	6	7
0	1	0	$4a^2 - 2b^2$	$\sqrt{2}\lvert a\rvert < \lvert b\rvert$

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 2 で f_{xy} がない方が 1 名.
- 7 は 6 からの帰結であれば正解.
- 7 で等号を含む場合（“$\sqrt{2}|a| \leqq |b|$ など）は不正解．実際，等号が成り立つ場合は極値を取っていない.
- 7 で不等号が逆向きの方が少なくとも 2 名高等学校に差し戻し（中間試験でコメントした）.

満点：77 名；10 点：23 名；5 点：7 名；0 点：4 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1–4, 5, 6–9, 10, 11–12, 13: 各 5 点

1 0	2 1	3 $-\sqrt{1-y^2}$	4 $\sqrt{1-y^2}$
5 $\dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1+y^2}}$			
6 -1	7 1	8 0	9 $\sqrt{1-x^2}$
10 $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{2}{1+x^2}$			
11 $\dfrac{r^2\sin\theta}{1+r^2}$		12 $0 \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \pi$	
13 $2-\dfrac{\pi}{2}$			

計算スペース（採点の対象にはしません）

- 5: $\tan^{-1}$ が奇関数であることに気がついていない答案が多数．一応正解にした．
- 5, 10: 対応する 1–4, 6–9 から正しく積分できているものは正解．ただし，1–4, 6–9 が長方形での積分になっているものは除く．
- 10:
$$-\log\cos\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = -\log\left(\frac{1}{1+\tan^2\tan^{-1}\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}}\right) = -\log\frac{1}{1+\frac{1-x^2}{1+x^2}} = -\log\frac{1+x^2}{2}$$
なので，左辺は正解（複数名あり）．逆三角関数に三角関数を施すと，代数的な式になる可能性あり．
- 12: $r\sin\theta \geqq 0$ は不正解．実際，この条件だけでは θ の動く範囲が無限個の区間の合併集合になってしまうので，積分は発散してしまう．

満点：42 名；25 点：33 名；20 点：15 名；15 点：8 名；10 点：4 名；5 点：7 名；0 点：2 名．

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：各行 5 点，*の説明 5 点.

	連続	偏微分可能	微分可能	C^1-級
f_1	○	○	○	○
f_2	○	* ×	×	×
f_3	×	○	×	×

*の理由

$$\frac{f_2(h,0)-f_2(0,0)}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}-0}{h} = \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{1}{\sqrt[3]{h}}$$

これは $h \to 0$ の時に発散するので，f_2 は $(0,0)$ で x に関して偏微分可能でない.

計算スペース（採点の対象にはしません）

問題 C

- 理由で “$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-4x}{3\sqrt[3]{x^2+y^2}^2}$ が存在しないから”，は不正解．それは C^1-級でない理由.
- “$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \infty$” は本当は不正確．実際には右極限と左極限で符号が違っているはずだが，今回は減点していない.
- 偏微分可能性は，すべての変数に関して偏微分係数が存在することだから，それを否定するには，いずれか一つの偏微分係数が存在しないことを言えばよい．解答例では f_x の非存在をいっている.

満点：20 名；15 点：24 名；10 点：28 名；5 点：27 名；0 点：12 名.

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 4〕

問題 D の解答欄 1–2：5 点，3–4：5 点，5–8：5 点，9–11：10 点，12–13：各 5 点

1 $x_\xi = \cosh\eta,\ x_\eta = \xi\sinh\eta$	2 $y_\xi = \sinh\eta,\ y_\eta = \xi\cosh\eta$
3 $\xi_x = \cosh\eta,\ \xi_y = -\sinh\eta$	4 $\eta_x = -\dfrac{1}{\xi}\sinh\eta,\ \eta_y = \dfrac{1}{\xi}\cosh\eta$

5 $\cosh\eta$	6 $-\dfrac{1}{\xi}\sinh\eta$	7 $-\sinh\eta$	8 $\dfrac{1}{\xi}\cosh\eta$

9

$$\cosh^2\eta\tilde f_{\xi\xi} - \frac{2}{\xi}\cosh\eta\sinh\eta\tilde f_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi^2}\sinh^2\eta\tilde f_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}\sinh^2\eta\tilde f_\xi + \frac{2}{\xi^2}\cosh\eta\sinh\eta\tilde f_\eta$$

10

$$\sinh^2\eta\tilde f_{\xi\xi} - \frac{2}{\xi}\cosh\eta\sinh\eta\tilde f_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi^2}\cosh^2\eta\tilde f_{\eta\eta} - \frac{1}{\xi}\cosh^2\eta\tilde f_\xi + \frac{2}{\xi^2}\cosh\eta\sinh\eta\tilde f_\eta$$

11

$$(\cosh^2\eta + \sinh^2\eta)\left(\tilde f_{\xi\xi} - \frac{1}{\xi}\tilde f_\xi + \frac{1}{\xi^2}\tilde f_{\eta\eta}\right) + 4\cosh\eta\sinh\eta\left(-\frac{1}{\xi}\tilde f_{\xi\eta} + \frac{1}{\xi^2}\tilde f_\eta\right)$$

12 $a\xi^2 + b$ ($a,\ b$ は定数)	13 $a(x^2 - y^2) + b$ ($a,\ b$ は定数)

- 9–11 は合計 10 点．あるていど「できている」ものには 5 点を与えている．
- 12 は 11 からの帰結なら正解，13 は 12 からの帰結なら正解．
- 12 で “ξ^2” のような特別な解をひとつだけ挙げるのは不正解．問題文の「ならば」の解釈は?
- 3–4 が “$\partial\xi/\partial x = 1/(\partial x/\partial\xi)$ となってる人が 5 名．授業で何回か注意した．以降が 0 点になっているはず．

満点：22 名；30 点：17 名；25 点：21 名；20 点：11 名；15 点：21 名；10 点：7 名；5 点：11 名；0 点：1 名

学籍番号			-						氏名	

2015 年 8 月 4 日 09 時 00 分 ~10 時 30 分
山田光太郎 《解答例 Ver. 3.20150807》
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第一 定期試験 〔解答用紙 5〕

この用紙も回収します

問題 E 問題 E への回答は成績に一切関係ありません． [0 点]

(1) 週二回，半学期の授業についての感想，ご意見をお書きください．
回答欄

(2) なにか言い残すことがありましたらお書き下さい．

回答欄

得点	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15
人数	4	12	9	6	15	8	11	9	7	3	5	5	6	5	3	1	1	1

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2015 年度入学の方は，学籍番号のうち “15_” を除いた番号の席に着席してください．
- 2015 年度以前入学の方はご自分の名前のある席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 5 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
  提出物の学籍番号を間違えた方がいらっしゃいます．くれぐれも間違えないように．
- **解答用紙 5 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **5 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，解答用紙 5, 持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-							氏名	