微分積分学第一 (4)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc1/

2015.06.23

ご意見

ご意見： 調和関数ちょうわかりやすい

コメント： はいはい

ご意見： ／＾ｏ＾＼フッジサーン

コメント： 噴火するの?

ご意見： 滑り芸が面白い．

コメント： そりゃキャリア 30 年ですからね．

ご意見： 「変態」という言葉の先生による使われ方になれることができません．

コメント： そうですか．

ご意見

ご意見： 授業開始前のプリント配布は一番前の一箇所だと効率が悪いので後ろにも置いてください．授業開始後は一番前だけにしていただいていいですから．

コメント： それを，みなさんで運用していただけませんか?

ご意見： 講義資料を後ろに置けば，授業が中断されることはないですし，学生もいちいち前へいって取りに行かなくてもいいので，資料は一番後ろに並べて欲しいです．

コメント： それじゃ遅刻し放題?

ご意見： 遅刻してきた人をいじるのが面白かった．

コメント： 楽しみが少ないもので．

質問から

- Q: 問題 1-1 の (2) がなぜ No. なのかわかりません．$x = y^4$ ってことは $x \geq 0$ だから $y = \sqrt[4]{x}$ で x を決めれば y はただ 1 つに決まるから関数といえるということにはならないんですか?
- A: ならないんです．$x > 0$ なら 4 乗して x になる実数は 2 つあり，問題文ではそのどちらを選ぶかという条件がありません．「負でない実数 x に対して，4 乗して x になる
負でない 実数 y を対応させる」なら関数になります．
- Q: $\int \frac{1}{1+x^4}dx$ をどのようにして求めたらよいのか分からない．
- A: $1+x^4 = (1+x^2)^2-(\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$
と因数分解したうえで，部分分数分解

$$\frac{1}{1+x^4} = \frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}$$

する．

質問から

Q: xyz 座標を書くときに右手系を推奨されていましたが，なぜなのでしょうか?

A: ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, y_3)$ の外積（ベクトル積，クロス積）は

- 大きさが $|\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\sin\theta$ (θ は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ のなす角)，
- 方向は $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ に直交し，
- 方向は $\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{y}$ に向かって右ねじを回したときにねじの進行方向をむく

ベクトルである．

$$\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{y} = \left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \right)$$

質問から

Q: **多変数関数の逆関数は定義できますか?**

A: **一般に定義できません．$f(x,y)$ の等高線が一般には曲線になる，ということから数 z をひとつ決めても $z=f(x,y)$ となる (x,y) はただ一つには定まりません．2 つの 2 変数関数の組が与えられると，逆に解くことができそうな気がします（第 4 回）．**

Q: **偏微分のとき，1 変数の微分と同じように $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial f}}$ とできますか?**

A: **いいえ．第 4 回で詳説します．**

関数のグラフと等高線

Q: **地図，気圧の等高線は互いに交わることはありませんが，等高線が交わるような多変数関数は存在しますか．**

A: $f(x,y)=x^2-y^2$ **の高さ** 0 **の等高線が交わることは講義で見た．一般に，地図の等高線も交わることがあります．（違う高さの等高線は交わりません）．**

- $f(x,y)=x^2+y^2$
- $f(x,y)=x^2-y^2$; $f(x,y)=x^2-y^2$; **等高線**
- $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$
- $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ (**問題** 2-6)

質問から

- Q: 等高線の考えは，グラフを書くということと同じなのか?
- A: グラフと等高線は定義が違いますが，どうして同じと思うのですか?
- Q: 等高線の考え方は増減を考えているのと何が違うのですか．
- A: どこが共通なのでしょう．

それ以前に「等高線の考え方」とはなんでしょう．等高線の定義は分かりますが，その「考え方」がどんなものを指しているかがわかりません．

$\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された 2 変数関数 $f(x,y)$ の

$$\text{等高線} = \{(x,y) \in D \mid f(x,y) = c\} \qquad (\text{高さ } c \text{ の等高線})$$

$$\text{グラフ} = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$$

質問から

Q: 2 変数関数において，片方を固定して微分する偏微分における数学的な意味はありますか．1 変数関数の場合は，グラフの傾きを求めるというイメージがあり分かりやすかったですが，今回の偏微分はどのような働きをするのか分かりにくいです．

A: 1 変数関数の $f(x)$ の微分係数は，x を変化させたときの $f(x)$ の変化率，というのが（高等学校でならった）微分のもともとの意味．グラフの（接線の）傾きはそれから導出される副次的な意味です．関数 f の x に関する偏微分は x を動かした時の f の変化率．グラフのイメージは当面わすれていても問題ありません．

質問から

Q: d や ∂ の扱い方がよく分かりません．たとえば $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ となるのはなぜですか．もし文字どおし（原文ママ）をすべて掛けたとしたら，$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x^2}$ となると思います．逆に ∂x と ∂x を掛けて ∂x^2 になるんだとしたら，∂^2 とはどういうことを意味するのか分かりません．左辺のように長ったらしいから略してかくというだけなのでしょうか．

A: 高等学校で習った $\frac{d^2 y}{dx^2}$ の記号は受け入れられますか? 本来なら $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$ と書くところですが，習慣的に $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ と書くようです．いずれにせよ「掛け算」を意味しているわけではないので,「熟語」としてなれて下さい．

おまけ