微分積分学第一 (8)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc1/

2015.07.07

授業評価

授業評価へのご協力をお願いいたします.

回答数 14/**受講登録者** 114 （2015 **年** 7 **月** 5 **日** 22:00 **現在**）;
目標：90/114

7 月 2 日までの結果

ご意見

ご意見： 時に提出用紙にかいてあるものがよめない．
コメント： ごめんなさい．なるべく丁寧にしますが，主に講義資料の方を見ていただけるとありがたいです．

ご意見： 20 分くらい寝てしまいました Zzz
ご意見： ごはんの後の授業は非常に眠いものです．楽しそうに授業していて山田さんは幸せですな．
コメント： ゆっくり眠れるのもいいですな．

ご意見： 火曜日朝早いよー
コメント： そう思うけど．

ご意見： 教授が最初に座ってて心臓がどきんとしました．
コメント： そんなに驚かないでよ．

ご意見から—講義 vs 講議

ご意見： 講議資料と教科書で関連した内容があれば，講議資料のほうに教科書のページ番号を書いてちゃんと教科書を活用したほうがいい気がします．
講議プリントの方向微分可能と微分可能の違いがわかりません．（質問から）

コメント： 最初の授業時間，6 月 16 日，23 日の講義資料にて「講議」という漢字の誤りを指摘しています．

ご意見： 文字をカラフルにしてみた（小学生）

コメント： 手間がかかります

ご意見から

ご意見： 進む速度が回によってバラバラなのでペースがつかみにくい
授業の進行が少しはやすぎます
板書がおいつきません
先生の説明はやすぎます IIII
急に授業スピードが上がって面食らった．
黒板に書く量が多い．

コメント： 前回材料を提供して，今回にすこし復習の予定．

ギリシア文字

ご意見： ギリシャ文字が数式に多く出て来たので若干の抵抗があった．

η (eta) がうまく早く書けません．ζ （何とよむかわからない）は今後授業でたくさん板書しますか? もし授業で扱うなら，eta とともに家で書く練習をしてきます.（質問から）ξ, η, ζ は書き慣れていないので使いにくいです．他の記号では駄目ですか? （質問から）

コメント： 理工系の世界ではギリシア文字の読み書きができることは常識と思います．高等学校の教科書にも書いてあるし．

Q and A

Q: 中間試験に持ち込める紙はボールペンで色をつけるなど紙に変形を加えないのならばどのようにしてもよいのですか?

A: はい．そう言いませんでしたっけ．

Q: 火曜日に返却するんですか?（切実）1 限は難しいです．

A: 当日に受け取れない方への指示は試験問題に書いておきます．

Q: キューピーさんの 3 分 cooking とは???

A: キューピー 3 分クッキングは TV の料理番組．「こちらにできあがったものが. . . 」というたとえとして使った．

Q and A

Q: **波動方程式に波を表す以外の使い方はありますか**?

A: **むしろ波動方程式に従う量のことを波とよぶのではないでしょうか．**
電磁波の発見の経緯（マックスウェルによる予言，ヘルツの実験による確認）？

Q and A — 写像

Q: 象像（原文ママ：写像のことか）は授業でやるのでしょうか．（テキストに書いてありましたが授業でとばされてました）

Q: P 40 で使われた写像が理解できません（略）写像と関数は関係あるのでしょうか．

A: 対象を「正確」に表すには写像の言葉が必要なのですが，そこに拘泥しないで大雑把に捉えてもらいたいと思い，講義ではあえて写像の言葉を避けました．
一般に，集合 A の各要素に対して，集合 B の要素を対応させる規則を写像という．とくに B が数の集合（たとえば $\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}$ の部分集合）であるような写像のことを特に関数という習慣があるようです．

Q: 合成写像と恒等写像についてわかりません．

A: 「についてわかりません」という表現では，わからない対象が曖昧にぼかされていて答えられない．講義ノート 41 ページのどのへんがわからないのか．

Q and A —像と値域

Q: 「値域」と「像」について自分の解釈が正しいのか不安なので，判定をお願いします．
$f(x) = \sin x$，定義域を $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ とするとき，値域：$[-1, 1]$（x が実数全体を動くとき $f(x)$ がとれる値の範囲），像：$[0, 1]$ (x が定義域の範囲内を動くとき，$f(x)$ がとれる値の範囲)．

A: 値域の解釈が違います．
関数 f の値域：「想定している f の値の取りうる範囲」
たとえば，実数全体を定義域とした関数 $f(x) = \sin x$ の値域を $\mathbb{R}$ と考えてもよい：$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

あたえれた関数の像を調べるのは数学的に大問題である場合もあり，つねに「像」を考えなければならないとすると関数の記述すらできなくなる場合があります．

Q and A

Q: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ の Example について，講義では $\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ としていました．『$x = r\cos\theta$ より $r = \frac{1}{\cos\theta}x$．$\frac{\partial r}{\partial x}$ では $1/\cos\theta$ を定数とみなすから，$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}$』この考え方はどこが間違っていますか．

Q: ♡ で $x = r\cos\theta \to \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta)$ だと $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{\cos\theta}$ はなんでですか?

A: <u>変数変換</u> とその <u>逆変換</u> の微分の関係を考えている：

$$x = x(r,\theta) = r\cos\theta, \qquad y = y(r,\theta) = r\sin\theta \tag{1}$$

は変数 (r,θ) と (x,y) の関係を与える．
(1) を (r,θ) についてとくと，

$$r = r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \theta = \theta(x,y) = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \tag{2}$$

このとき $\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}^{-1}$.

Q and A

Q: **講義資料 40 頁の注意 4.4 に「文脈で独立変数がはっきりわかるなら」とあります．この「独立変数がはっきりわかる」とは，具体的に「何がどうである」状況のことでしょうか．「x と y，ξ と η が独立変数の関係にあることがあきらかだ」という状況で合っていますか．**

A: **合っていません．**
<u>独立変数</u>：関数 $f(x,y)$ の，自由に動かせる変数 (x,y)
<u>変数変換</u>：独立変数 (x,y) を，関係式 $x=x(\xi,\eta)$, $y=y(\xi,\eta)$ によって別の変数 (ξ,η) に置き換えること：

$$\tilde{f}(\xi,\eta)=f\big(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\big)$$

$\tilde{f}$ の独立変数は (ξ,η) ですが，文脈でこれを考えていることがあきらかな場合，$\tilde{f}$ の代わりに f と書く．
f_x や f_y がでてくる状況では独立変数は (x,y)．
f_ξ や f_η がでてくる状況では独立変数は (ξ,η)．

Q and A — 多変数の変数変換

Q: **変数が** 3 **コ以上になっても今日習ったのと同様の方法で偏微分できますか**?

A: **合成関数の微分公式ですか**? **はい．**

Q: n **変数の間の変数変換に関しても** $n \times n$ **のヤコビ行列を用いることで変数変換できるのですか．**

A: **はい．**

Q: n **個の文字を** n **個の別の文字に対応させたとき，**
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (\xi_1, \dots \xi_n)$ **のヤコビ行列と**
$(\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto (x_1, \dots x_n)$ **のヤコビ行列も互いに逆行列になりますか．’**

A: **はい．**

Q and A — 多変数の変数変換

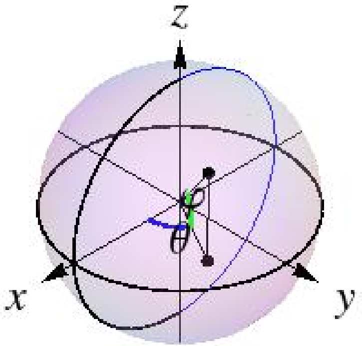
問題 4-6
空間の変数変換

$$x = r\cos\theta\cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi$$
$$\left(r > 0, -\pi < \theta < \pi, -\tfrac{\pi}{2} < \varphi < \tfrac{\pi}{2}\right)$$

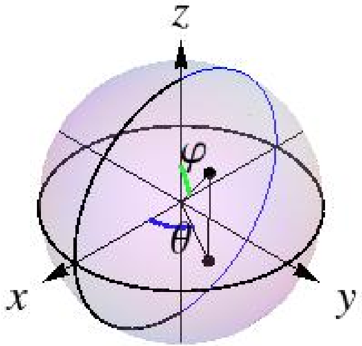
に対して

$$\begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi} & \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} & 0 \\ -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix}^{-1}$$

Q and A — 空間の極座標



$r(\cos\theta\cos\varphi, \sin\theta\cos\varphi, \sin\varphi)$



$r(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$

ご意見から

ご意見： 先生の授業はとても $x^2 + (y - \sqrt[3]{x^2})^2 = 1$ です．

コメント： そうですか．この図形は C^∞-級関数

$$F(x,y) = (x^2-1)(x^2-3y^2-1)^2 - (x^2-y^3-3y+3x^2y)^2$$

の高さ 0 の等高線になっていますね．点 $(0,\pm 1)$ は $dF = 0$ となる点，すなわち特異点になっています．

陰関数定理

Theorem (陰関数定理の特別な場合；定理 4.12)

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^k-級関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ と $F(x_0, y_0) = 0$ をみたす点 $(x_0, y_0) \in D$ をとる．もし，$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ が成り立っているならば，P を含む領域 $U \subset D$ と，$\mathbb{R}$ のある開区間 I 上で定義された C^k-級の 1 変数関数 $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

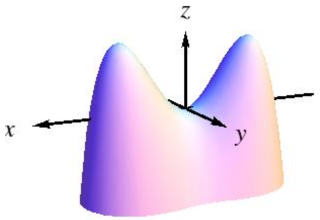
$$(x, y) \in U \quad \text{かつ} \quad F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in I \quad \text{かつ} \quad y = \varphi(x).$$

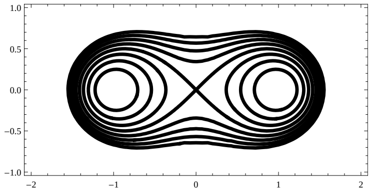
とくに各 $x \in I$ に対して $F\bigl(x, \varphi(x)\bigr) = 0$ が成立する.

- 定理の条件を満たすとき，等高線 $F(x, y) = 0$ は (x_0, y_0) の近くで $y = \varphi(x)$ となめらかな関数のグラフで表される．
- $F(x_0, y_0) = 0$ となる点 (x_0, y_0) で $dF = (f_x, f_y) \neq (0, 0)$ ならば，等高線 $F(x, y) = 0$ はなめらかな曲線（命題 4.15）
- $dF = 0$ となる点：特異点（例 4.16，問題 4-9）．

陰関数定理（例 4.16, 問題 4-9）

$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$$
$$F_x = F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), (1,0), (-1,0)$$





グラフ・等高線
等高線; **等高線アニメーション**

Cassinian Oval (Wikipedia) ; Domenico Cassini 1625–1712 (Wikipedia)
Lemniscate (Wikipedia) ; Jakob Bernoulli 1655–1705 (Wikipedia)

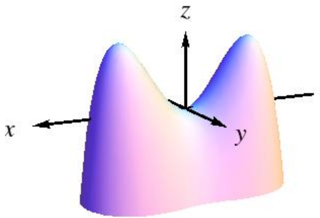
陰関数定理（例 4.16, 問題 4-9）

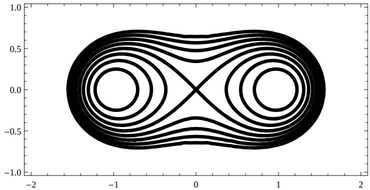
$$F(x,y) = 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$$

$$F_x = F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,0), (1,0), (-1,0)$$

$$F(0,0) = 0, \qquad F(1,0) = F(-1,0) = 1$$

高さ 0, 高さ 1 以外の等高線は空集合でなければなめらかな曲線





陰関数定理

$$F(x,y) = (x^2-1)(x^2-3y^2-1)^2 - (x^2-y^3-3y+3x^2y)^2$$

$$F_x = F_y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x,y) = (0,1), (0,-1)$$

$$F(0,1) = F(0,-1) = 0.$$

$F(x,y) = 0$