微分積分学第一 (14)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc1/

2015.07.31

おしらせ

- **今回で前期「微分積分学第一」の講義は終了です．**
  ご聴講ありがとうございました ♡
- **定期試験の問題にて「週 2 回講義」についてのご意見を聞きます．ぜひご回答ください．**
- **定期試験範囲を「主として 7 月 31 日までの講義内容」としましたが，主に前回までの内容とします．**
- **授業評価へのご協力お願いいたします．**
  7 **月** 30 **日** 15 **時** 00 **分現在** $30/114$．**目標** $90/114$．
  [結果]

質問

Q: **微積分の期末試験が気になって，ごはんも美味しく食べられない今日この頃ですが，成績の評価の内訳として，十分に単位がもらえる（中間試験などの成績を考慮しない）場合，期末試験と演習の小テストはそれぞれ何割でしょうか．**

A: **未定．**
「足し算をする」ことも非自明．
ごはんは美味しく食べてください．大きくなれません．

Q: **中間試験で範囲だった講義ノート** 1∼4 **は期末試験の範囲になりますか**?

A: **中間試験の意味（**[FAQ]**）を考えれば自明と思う．**

Q: **講義資料** p 69**，**
誤（まずは，第 5 **回でやったように計算してみよ）**→
正（まずは，第 5 **回でやったように計算してみよう）**

A: **誤りではありません．命令形です．**

質問

Q: **授業プリントに誤りがないのが誤りです（>__<）**

A: **そんなことはありません．**

Q: **〓義ノート（山田注：最初の文字は「言偏に義」）の計算省略しすぎ．**

A: **漢字間違えすぎ．**

Q: **山田教授は酸性雨と雷と積分，どれが 1 番恐いですか．**

A: [**まんじゅう**]

Q: **いつものサスペンダーをつけた先生が見れなくて**
うち ♡ 悲しいわ ♡

A: **そう．**

質問（積分・重積分）

Q: 閉区間 $[a,b]$ の分割 Δ の幅が書いてあったんですが，$|\Delta| = \max\{|x_1 - x_0|, \dots, |x_N - x_{N-1}|\}$ はなぜ max でなければならないのですか．

A: 「分割をどんどん細かくする」ことを，$|\Delta| \to 0$ と書きたい．

Q: 重積分の計算で式を $\int dy \int dx$ と $\iint dx\,dy$ とすることの違いは何かありますか．

A: 後者が重積分．
前者は「累次積分」で，後者の「計算法」

Q: $\iint f(x)\,dx\,dy$ は $\int dx \int f(x)\,dy$ と書いても同じですか?

A: 積分範囲がないので，判定できません．

Q: 演習で $\int_c^d \int_a^b dx\,dy$ と書いたら×になったのですがなぜですか?

A: 文脈が不明なのでお答えできません．

質問（積分・重積分）

Q: 重積分において，変数の片方を固定してもう片方の変数について積分するという操作は，図形的にどんなものをイメージすればいいんですか? それとも何も考えずに機械的にやり方を覚えたしまうがいいですか?

A: 帯のような部分で総和をとる，という説明を 7 月 14 日ころにしました．

Q: $D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \le 1, y^2 + z^2 \le 1\}$ で D の体積 $\iiint_D dx\,dy\,dz$ を求めたいのですが，たとえば x, y を固定すると

$$-\sqrt{1-y^2} \le z \le \sqrt{1-y^2}, \quad -\sqrt{1-x^2} \le z \le \sqrt{1-x^2}$$

となり，z の範囲が複雑になります．うまく D の体積を重積分で求める方法はありますか．

A: x, y を固定すると，2 番目の式はでてこないのでは?

質問（積分・重積分）

Q: どの変数から積分するかって，やっぱり計算のしやすさとか考慮するんですよね．

A: と最初に説明した．

Q: $D : z^2 \leq 4x,\ y^2 \leq x - x^2$, $\iiint_D dx\,dy\,dz$ の問題，先生は z から積分してましたが y からやってもいいですか? (どっちら楽ですか)

A: 6 通りの計算を，全部やってごらんなさい，と講義の際に言いましたよね．

質問（積分・重積分）

Q: **重積分とは?**
A: **講義ノート第 5 回.**

Q: **積分の考え方はどのような問題を解決しようとして生まれたのですか?**
A: **発生からいったら面積や体積や質量の計算でしょうね．だから何だということですが.**

Q: **重積分における積分区間被積分関数の対称性というのが分かり辛いです.**
A: **具体的にどういう状況?**

Q: **偏微分では順序によって値が変わってしまう場合がありましたが，重積分でも順序によって値が変わってしまう場合はありますか?**
A: **通常は一致する．"広義積分" ではまずい例がある.**

質問（面積・体積）

Q: 大学入試数学で xyz 空間における図形の体積を求める問題では，解法に「$z = t$ の平面における切断面の面積 $S(t)$ を t について定積分することで求める」というのが定石でした．これは「z を固定して $S(t)$ を求め，次に z を動かす」という点で重積分（累次積分）と本質的には同じことをしていたのでしょうか．

A: そのとおり.「受験数学」でなく教科書にありますね．その考え方を用いて錐の体積を求めたものでした．

Q: 三変数の重積分では，(x, y, z として) まず 2 つを固定して，のこりの一つで積分すると思っていました．しかし $D = \{(x,y,z) | x^2+y^2 \leq 1, y^2+z^2 \leq 1\}$; $\iint_D dx\,dy\,dz$ でまず Y を固定して，といったときに (?) となってしまいました．そこは「面」を集めたという考えかたでよいのでしょうか．

A: 実際にレシピどおりにやっても同じになりますよね．

質問（面積・体積）

Q: 体積を求める問題を見た二次元に恋するお友達「三次元ムリ〜」

A: だから無限個の 2 次元の図形にわけて，さらに総和をとる．2 次元ラヴにはたまらないでしょ．

Q: $D = \{(x,y,z) \mid z^2 \leq 4x, y^2 \leq x - x^2\}$ の 3 変数関数での $|D| = \iiint_D dx\,dy\,dz$ は体積だった．では 4 変数関数での D は何を意味しますか?

A: 「D は」ではなんとも言えない．D での 1 の四重積分は，D の「4 次元体積」（をこの積分で定義する）です．

質問（面積・体積）

Q: P. 62 **曲面の面積で，いきなり** $[x, x+\Delta x] \times [y, y+\Delta y]$ **上のグラフで平行四辺形に近いと書いてあったのですが，どう考えれば微小領域でそのようにみなせるのかわかりません．**

A: **やってみます．**

Q: **楕円回転体（**$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **を** x **軸を軸にして一回転）の表面積は** $\displaystyle\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$ **で求められますか**?

A: f **は何にすればよいでしょう．**

Q: **重積分を使って立体の表面積を求めることは可能でしょうか．**

A: **はい．講義ノート** 62 **ページ．**

質問（面積・体積）

Q: プリント P 61 の初めで「『微小部分の面積・体積の総和』の極限が面積・体積であること信じて」とあるのですが，厳密に考えた場合は面積・体積と言えないのでしょうか．

A: 面積・体積の定義をしていないので，言えるかどうかは確定しません．実際は，積分で面積や体積を定義するのがよいと思います．

Q: D の面積を求めるとき $\iint_D dx\,dy$ とするのは D の面積の値と,（高さ 1，底面積 D）の立体の体積の値が等しいのを利用して，体積をまず求めるからですか? たとしたら，求めているのは面積ではなく，本質的には体積であるということですか?

A: 体積である，と思うのは筋が悪いと思います．微小長方形の面積 $\Delta x\,\Delta y$ の総和の極限が考えている図形の面積であり，定数関数 1 の積分でもある，というだけです．

質問（面積・体積）

Q: xy 平面上の領域 D について，$\iint_D dx\,dy$ は領域 D の面積の値とも $z = f(x,y) = 1$ となるような xyz 座標上での立体の体積の値とも等しくなるはずです．ということは $f(x,y) = 1$ となっている図形の立体積を求めるときは D の情報に $f(x,y) = 1$ を加えないと答えの値が正しくても試験では間違いとみなされるということですか?

A: 何をおっしゃっているのかわかりません．具体的にはどういう状況を想像しているのですか? ちなみに「$z = f(x,y) = 1$ となるような xyz 座標上での立体」って何のことかわかりませんよね．

Q: 三重積分で立体の体積が求まる理由がわからなかったのでもう一度説明お願いします．

A: はい．

質問（面積・体積）

Q: **三重積分で体積を計算する式は $\iint f(x,y)\,dx\,dy = \iiint 1\,dx\,dy\,dz$ （ただし $z = f(x,y)$）ということですか?**

A: **何の体積か，と積分範囲がないので，判定できません．xy 平面上の面積確定集合 D を含む領域で定義された負でない値をとる連続関数 f に対して $D' = \{(x,y,z) \mid x,y \in D, 0 \leq f(x,y) \leq z\}$ とすると，D' の体積は$\dots$．**

Q: **$f(x,y) = 1$ のとき $D = \iint_D dx\,dy$ において D は面積であるが（原文ママ）$f(x,y) = xy$ のとき $E = \iint_D xy\,dx\,dy$ において E は何を表す値であるかわからない．体積について考えているのか．**

A: **前半で同じ D が 2 つの意味で用いられていおかしい．**

質問（面積・体積）

Q: $f(x,y)=z$ と表される関数のグラフがとじているなら $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ でそのグラフの体積は求められるのですか．

A: (1) 関数のグラフが閉じた曲面を与えることはありません (2) グラフの体積は 0 です．

Q: 構義ノート P. 63（原文ママ）の（略，2 行目から 3 行目）の計算がわかりません．導出過程を教えていただけると幸いです．

A: ベクトル積を計算して，その大きさを求めた．漢字は間違えないように．

質問（置換積分）

Q: 置換積分をするとき，何で置換をするか考えると思うのですが，先生はどのように何で置換するかを決めていますか．置換するものによってはすごくややこしくなることがあると思ったので．

Q: 積分ができるように式変形をするにはどうやったら思いつきますか?

A: 定石がいくつかありますが 試行錯誤です．

Q: 置換積分法を使うとき単調という条件があるとおっしゃっていましたが，ある区間で増減が変わるときは，増加と減少の部分で区間をわけて置換積分法を用いればできますか?（例省略）

A: 増加，減少がまざった場合，変数変換前の区間と変換後の区間が 1 対 1 に対応しないので，同じ区間を 2 度以上積分することになり，変換前の積分と同じ値にはならない可能性があります．

質問（重積分の変数変換）

Q: **ヤコビ行列ってヤコビさんが考えたんですか**?

A: **ヤコビさんってどのヤコビさん**?
[Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851)]

Q: **ヤコビ行列の証明が知りたい．**

A: **ヤコビ行列はただの行列です．それを「証明する」ってどういうこと**?

Q: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ **がなぜ** $\det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ **なのかわかりません．**

A: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ **の定義がこの行列式．**

Q: **微積分においてヤコビ行列の果たす意味はどういうことですか**?

A: **一つは定理** 6.15**．**

質問（重積分の変数変換）

Q: $(u,v) \mapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ が 1 対 1 対応していない場合は 1 対 1 に対応するような集合に分けて積分したのちすべて足し合わせればよいのですか．

A: いいえ．同じところを 2 回足しあわせてはいけません．

Q: 行列式は，同じ行・列が 2 つ以上あると 0 になりますが，重積分の変数変換をするときに，ヤコビ行列の行列式が 0 になってしまうことはあるのでしょうか．

A: 極座標 $(x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ の $r=0$ のときがそうですね．そういうときは変換が 1 対 1 でなくなる可能性がありますが，ヤコビ行列式が 0 となるので積分には影響を与えなかったりします．

質問（重積分の変数変換）

Q: 重積分の変数変換で $\iint dx\,dy$ から $\iint du\,dv$ に変えた後，なぜ $\det$ をかけるのか，なぜ $\det$ が関係しているのか．

A: 微小長方形の面積比．

Q: 変数変換でヤコビ行列式の絶対値を使うのはなぜ?

Q: 重積分の変数変換で絶対値になる理由がわからなかったのでもう一回講義してくれませんか．

A: 一変数関数の積分では「長さ」に符号を考えられる（$\int_a^b$ は $a > b$ でも意味がある）が，多変数関数の場合は簡単ではない．

Q: 絶対値と行列式の $|\ |$ の記号はどうやって区別するんですか?

A: 見た目では区別できないので，文脈で判断する．$|\ |$ の中が行列なら絶対値のわけがない．曖昧に思えるときは，言葉で補足する（“ただし $|\ |$ は行列式を表す” のように）．

質問（重積分の変数変換）

Q: 今日の積分だったら変換するよりもそのまま積分したほうが早くないですか． / 今日の積分では置換しないで解いたほうが簡単だとおもいます．

A: 両方できれば公式の確認ができませんか?

Q: 変数変換を行う利点が見えませんでした．(例の問題は変換前の方が楽そう）．どのような利点があるのでしょうか?

A: そうですか．

Q: ふつうの置換積分に比べて重積分の方は大変で，$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$ となり，かなり計算が大変だと思った．置換した方が楽な場合とかの判断ができなさそうでした．これを使えばガウス積分ができるんですか.

A: できるんですよ．

Q: 重積分の変数変換をうまく何かにたとえるとどうなりますか?

A: 例える必要がありますか?

質問（重積分の変数変換）

Q: 3 つの変数を使った重積分で，そのうち 2 つの変数だけを変換することはできますか?

A: たとえば (x, y, z) の (x, y) を (u, v) に置き換えることを考えるなら $z(u, v) = w$ とおいて (u, v, w) を考えれば良い．

Q: 重積分の変数変換で $x(u, v)$, $y(u, v)$ のとき $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u \, \Delta v$ とかけましたが，三重積分で $x(u, v, w)$, $y(u, v, w)$, $z(u, v, w)$ のとき $\left|\det \begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix}\right|$ とかけるのですか?

Q: 重積分の変数変換は 3 変数以上に対しても同様にヤコビ行列式の絶対値を考えることでできますよね．

A: 講義ノート 70 ページ．

質問（重積分の変数変換）

Q: P. 68 で $F(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ で写した像の面積が $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \Delta u\,\Delta v$ で表される（近似される）説明をおねがいします．

Q: 変数変換をしたときに（中略） $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ をかける理由がいまいち分かりません．

Q: 変数変換をする時は誘導はあるのですか．

A: 例えば散歩しているときに「変数変換したい」と思ってもだれも誘導してくれません．

質問（広義積分）

Q: **広義積分は極限を使って求めているにもかかわらず，イコールで結んでしまってもいいのですか?**

A: $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ **や** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ **の左辺は極限をつかって求めますが，高校でもイコールで結んでませんか?**

Q: **広義積分が収束するということは，関数が** ∞ **で何かの値に収束しているということになりますか?**

A: $[0,\infty)$ **で連続な関数** f **の広義積分** $\int_0^\infty f(x)\,dx$ **が収束するとき，** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)$ **は存在するか，ですか? 答「いいえ」．**

質問（広義積分）

Q: $\int_0^1 \log x\,dx$ の値の絶対値は 1 となりますが，これは左図（略，$y=\log x$ のグラフの $0<x\leq 1$ の部分と x 軸との間に斜線）の面積を求めたことになるのでしょうか?

A: 面積の定義にもよるのでは? 有界でない図形の面積ですから，定義は自明でないはず．そして，定義するならこの積分の値で定めるのが自然だと思います．

Q: “ガンマ関数” と “ベータ関数” が第 7 回の講義資料で登場しましたが，それぞれギリシャ文字の 3 文字目，2 文字目というのはその名称と関係があるのですか．

A: 山田はよく知りません．知っている人おしえて．

質問（問題）

Q: $\iint_E \frac{x^5y^2}{(1+x^6)^2}\,dx\,dy$, $E = \{(x,y)\,|\,x^3 \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}$ の $x \le 1$ の部分はいるんですか? $x^3 \le y \le 1$，$0 \le x$ で $x \le 1$ はわかる気がするので．

A: そのとおりですね．

Q: 中間試験問題 C: $f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y) = (a,b)$ において $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) =$ (中略；極限を計算している) $= \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ となり極限値がでます．それで偏微分可能ではないかと思いました．なぜ偏微分可能ではないかを教えて欲しいです．

A: $a = b = 0$ のときは偏微分係数が決まらないのでは?

Q: 中間の C(3) が分からない．

Q: 2014 年の定期試験: $\varphi(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$, $\varphi(0,0) = 0$ の φ_x．ロピタルを使ってもいいですか．

A: いいですが. . .

質問（その他）

Q: **超ひも理論って十何次元とかって言っていますが，それって積分の限界なんでしょうか．**

A: **いいえ．**

Q: **講義ノート** p. 65 **の線形変換で** $L_A\colon \mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{X} = A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ **の** $\boldsymbol{X}$ **はどんなものですか．例などが欲しいです．**

A: A **と** $\boldsymbol{x}$ **の積ですが，それ以上に何が必要**?

質問（その他）

Q: **ラプラス変換をするメリットは何ですか?** $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ **の場合以外にも似たような変換をすることがありますが，メリットがわかりません．** $x = r\cosh\theta$, $y = r\sinh\theta$ **のとき** $\Delta f = f_{rr} + \frac{1}{r}f_r - \frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}$**．この他にも中間テストの問題** D **など．**

A: **「ラプラス変換」は問題** 7-5. **ここでは「ラプラス作用素の変数変換」．いい加減で自己流な言葉の使い方をしていると信用を下げます．ちなみに，ご質問の式は間違っていると思います．**

Q: $f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ **とおいてそれを次元をふやして** 2 **乗するという案はどうやって思いついたんですか．**

A: **何を言っているかわかりません．「次元をふやして** 2 **乗する」とはどういう操作のことを言っているのですか?**

ご聴講ありがとうございました