1. 初等関数の微積分

1.1　1 変数関数（復習）

高等学校で学んだ微分・積分は，関数に対する操作であった．

一般に（ある範囲の）数 x に対して，1 つの数 $f(x)$ を対応させる規則 f を（1 変数）**関数**[1] という．このとき，考える x の範囲を関数 f の**定義域**，値 $f(x)$ として想定している数の範囲を f の**値域** という．また，x が関数 f の定義域全体を動くとき，値 $f(x)$ が動く値域の中の範囲を f の**像** とよぶ[2]．

■ 実数の集合と区間　関数の定義域，値域，像を表現するために集合の言葉を復習しよう：数学的な対象の集まりを**集合**という[3]．とくに，**実数** 全体の集合を $\mathbb{R}$ と書く[4]．

一般に対象 x が集合 X の**要素**であるということを “$x \in X$” と表す．たとえば “$x \in \mathbb{R}$” とは “x は実数全体の集合の要素” すなわち “x は実数” であることを表している．

集合 X のいくつかの要素を集めて得られる集合を X の**部分集合**という[5]．集合 Y が X の部分集合であることを，記号 $Y \subset X$ と表す[6]．すなわち[7]

$$Y \subset X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \text{“}y \in Y \text{ ならば } y \in X\text{”}$$

である．

*) 2015 年 6 月 12 日/16 日 (2015 年 6 月 23 日訂正)

1) 関数（かんすう）: a function; 語源からすれば「函数」と書くのが正しいのかも知れない．

2) 定義域:the domain; 値域: the range; 像: the image.

3) 集合：a set; この説明では集合と集合でないものの区別がつけられないので何も言っていないことになるが，この授業で扱う範囲では，対象が明確に述べられるのでとくに曖昧になることはないはずである．

4) 実数: real numbers; 実数全体の集合: the set of real numbers; $\mathbb{R}$ は 太字の “R”．印刷では “$\boldsymbol{R}$” を用いることもある．実数とは**数直線上にめもることができる数**のことと思っておこう．実数の概念を数学的に満足な形で書き表すのはやさしくないが，後期「微分積分学第二」でその概要を紹介する．

5) 要素: an element; 部分集合: a subset; $X \subset Y$ と $x \in Y$ の区別に注意せよ．

6)「Y が X の部分集合である」ということを，高等学校の教科書では $Y \subseteqq X$ と書くことが多いが，それ以外の世界では $Y \subset X$ と書くのが多数派のようなので，ここでは後者（高等学校の教科書流でない方）を採用する．この用法では $X \subset X$ は正しい．

7) 記号 “$A \Leftrightarrow B$” は “A であるための必要十分条件は B”，“A と B は同値”，“A if and only if B”，“A is equivalent to B” と読む．

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合，すなわち実数の集合で，数直線上のひと続きの部分を表しているものを**区間**という．区間には次のようなものがある：

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, & (a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqq b\},\\
[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x \leqq b\}, & [a,b) &= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqq x < b\},\\
(-\infty,a) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}, & (-\infty,a] &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqq a\},\\
(a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}, & [a,+\infty) &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqq a\},\\
(-\infty,+\infty) &= \mathbb{R}, & [a,a] &= \{a\}.
\end{aligned}$$

ただし a, b は $a < b$ をみたす実数である．とくに (a,b) を**開区間**，$[a,b]$ を**閉区間**という[8]．

■ 1 変数関数の例

例 1.1. 実数 x に対して実数 x^2 を対応させる対応の規則にいま f という名前をつけると，“f は定義域を $\mathbb{R}$，値域を $\mathbb{R}$ とする関数である” と考えることができる．引用符で囲んだ部分のことを

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

と書く．また，“f は x を x^2 に対応させる” ということを

$$f\colon x \longmapsto x^2, \qquad f(x) = x^2$$

と書く．矢印 “$\to$” と “$\mapsto$” はこのように使い分ける．

この関数 f によって $\star$ に対応する値（数）が $f(\star)$ である：

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 4, \quad f(a) = a^2, \quad f(s) = s^2, \quad f(x^2-1) = (x^2-1)^2.$$

ここで x が実数全体を動くと，その値 $f(x)$ は負でない実数全体[9] を動く．したがって f の像は $[0,+\infty)$ となる[10]．　◇

8) 区間: an interval; 開区間 an open interval; 閉区間: a closed interval. 開区間の括弧は他の記号と紛らわしいかもしれない．それを避けるために (a,b) のことを $]a,b[$ などと書く場合もある．無限大 $\pm\infty$ は実数ではないので，たとえば $(0,+\infty]$ という表記はない．

9) 負でない実数: a nonnegative real number; 負でない実数全体 (the set of nonnegative real numbers) これは $[0,+\infty)$ のことを表している．正の実数全体 (the set of positive real numbers) は $(0,+\infty)$ のこと．同様に正でない（負の）実数全体 (the set of nonpositive (negative) real numbers) はそれぞれ $(-\infty,0]$, $(-\infty,0)$ を表す．

10) ここでの “像” のことを “値域” という場合もあるがこの講義では例 1.1 のように “像” と “値域” を使い分ける．

例 1.2. (1) 実数 x に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 -1 に対して平方して -1 になる実数は存在しないから，この対応は関数とみなすことはできない．

(2) 負でない実数に対して「平方して x になる実数」を対応させることを考える．実数 4 に対して平方して 4 になる実数は $+2$ と -2 の 2 つがあるから，この対応は関数とみなすことはできない．

(3) 負でない実数全体の集合 $[0, +\infty)$ の要素 x に対して，「平方して x になる負でない実数」はただ 1 つ存在する．これを $\sqrt{x}$ と書くことにすれば，$f\colon x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$ は $[0, +\infty)$ を定義域にもつ関数である． ♢

この授業で扱う 1 変数関数は，主に定義域が $\mathbb{R}$ の区間，あるいはそれらの有限個の合併集合であるようなものである．

例 1.3. (1) 開区間 $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ の要素 x に対して x の正接 $\tan x$ を対応させる規則 f_1 は，定義域を I，値域を $\mathbb{R}$ とする関数で，f_1 の像は $\mathbb{R}$ である．

(2) 0 でない実数 x に対して $f_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ を対応させる規則 f_2 は

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

を定義域とする関数で [11]，その像は $(0, +\infty)$ である． ♢

関数は一本の式で表される必要はないし，数式で表されている必要もない．

例 1.4. 次の f_3, f_4, f_5 は $\mathbb{R}$ 上で定義された関数である：

(1) 実数 x に対して，

$$f_3(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

[11] 記号 “$\cup$” は合併集合 the union を表す．とくに $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$.

(2) 実数 x に対して，

$$f_4(x) = \begin{cases} 1 & (x \neq 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(3) 実数 x に対して，

$$f_5(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数のとき}^{12)}), \\ 0 & (x \text{ が無理数のとき}). \end{cases}$$

関数 f_3, f_4, f_5 の像はそれぞれ $\mathbb{R}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 1\}$ である [13]． ♢

■ **1 変数関数のグラフ** 区間 I で定義された 1 変数関数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ の**グラフ**とは [14]，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in I\} \subset \mathbb{R}^2$$

のことである．関数 f が “性質のよい” 関数ならばそのグラフは座標平面 $\mathbb{R}^2$ の曲線になる．図 1.1 は，第 1 回で与えた例 1.3, 1.4 の関数 f_1–f_5 のグラフである．

1.2 初等関数

高等学校では，微積分の対象として，多項式・有理式・冪（べき）乗根・指数関数・対数関数・三角関数と，具体的な関数を扱った [15]．ここでは，高等学校で学ばなかったいくつかの関数の定義，性質をまとめておく．

■ **三角関数の記号** 高等学校で学んだ**余弦** cosine, **正弦** sine, **正接** tangent の他に，次の記号を用いることがある：

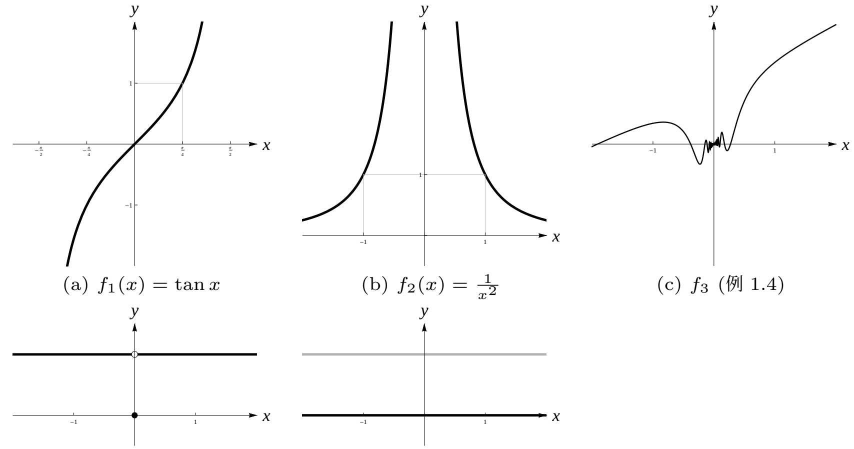
$$\cot x := \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \sec x := \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x := \frac{1}{\sin x}. \tag{1.1}$$

[12] 有理数: a rational number; 無理数: an irrational number.

[13] 関数 f_3 の像が $\mathbb{R}$ であることを示すには連続関数に関する中間値の定理を用いるが，今は深入りしない．

[14] 関数 f のグラフ: the graph of a function f.

[15] 有理式：a rational function; 冪乗根（巾乗根とも書くが，これは嘘字）：a radical root; 平方根：the square root; 立方根：the cubic root; n-乗根：the n-th root；指数関数：the exponential function; 対数関数：the logarithmic function; 三角関数：the trigonometric functions, the circular functions.



(a) $f_1(x) = \tan x$　(b) $f_2(x) = \frac{1}{x^2}$　(c) f_3 (例 1.4)　(d) f_4 (例 1.4)　(e) f_5 (例 1.4)

図 1.1　例 1.3, 1.4 の関数のグラフ．関数 f_5 のグラフの灰色の線は x 座標が有理数，y 座標が 1 である点の集合，黒の線は x 座標が無理数，y 座標が 0 である点の集合を表している．

これらをそれぞれ **余接** cotangent, **正割** secant, **余割** cosecant という [16][17]

例 1.5. 次が成り立つ [18]：

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1+\tan^2 x = \sec^2 x, \qquad \frac{d}{dx}\cot x = -(1+\cot^2 x),$$
$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x, \qquad \frac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x, \tag{1.2}$$
$$\int \tan x\,dx = -\log|\cos x|, \qquad \int \cot x\,dx = \log|\sin x|.$$

さらに，問題 1-11 で見るように次が成り立つ：

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x} = \log\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right|, \tag{1.3}$$
$$\int \csc x\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right|. \qquad \diamondsuit$$

[16] 余割は “cosec” とも書く．また $\sec x = (\cos x)^{-1}$ だが，これを $\cos^{-1} x$ とは書かない．
[17] ここでは，記号 “:=” は「左辺を右辺によって定義する」という意味で用いる．
[18] 式が煩雑になるのを避けるために，ここでは原始関数における任意定数を省略する．

■ 逆三角関数

定義 1.6.
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \cos y$, $0 \leqq y \leqq \pi$ をみたす y を $y = \cos^{-1} x$ と書く：
$$y = \cos^{-1} x \quad\Longleftrightarrow\quad x = \cos y \quad \text{かつ} \quad 0 \leqq y \leqq \pi.$$
- 与えられた x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して $x = \sin y$, $-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}$ をみたす y を $y = \sin^{-1} x$ と書く：
$$y = \sin^{-1} x \quad\Longleftrightarrow\quad x = \sin y \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}.$$
- 与えられた実数 x に対し $x = \tan y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ をみたす y を $y = \tan^{-1} x$ と書く：
$$y = \tan^{-1} x \quad\Longleftrightarrow\quad x = \tan y \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

これら $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ をそれぞれ**逆余弦関数**，**逆正弦関数**，**逆正接関数**といい，これらをまとめて**逆三角関数**とよぶ [19]．

例えば，次が成り立つ [20]：

$$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \quad \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5}{12}\pi, \quad \tan^{-1}\bigl(\sqrt{2}-1\bigr) = \frac{\pi}{8}.$$

例 1.7. (1)　任意の x $(-1 \leqq x \leqq 1)$ に対して
$$\cos^{-1} x + \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2}$$
が成り立つ．

実際，$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x\right) = \cos\bigl(\cos^{-1} x\bigr) = x$．ここで，$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi$ だから $-\frac{\pi}{2} \leqq \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x \leqq \frac{\pi}{2}$ なので，$\sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x$．

(2)　次が成り立つ：
$$\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}, \qquad 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$
実際，$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2}$, $\beta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$ とすると，$\tan\alpha = \frac{1}{2}$，$\tan\beta = \frac{1}{3}$ だから，正接の加法公式を用いれば $\tan(\alpha+\beta) = 1$．ここで，$\tan^{-1} x$

[19] 逆余弦：arc cosine; 逆正弦：arc sine; 逆正接: arc tangent; 逆三角関数：inverse trigonometric functions. 逆三角関数の記号は，arccos, arcsin, arctan と書くこともある．
[20] と書いてあったらとりあえず確かめよ．

が単調増加であることに気をつければ

$$0 < \beta < \alpha = \tan^{-1}\frac{1}{2} < \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

ここで $0 < \alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ なので $\alpha + \beta = \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$ となり第 1 式が得られた．正接の 4 倍角の公式から第 2 式が得られる（問題 1-5）[21]．
♢

命題 1.8. 逆三角関数の導関数は次で与えられる：

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1} x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\sin^{-1} x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad \frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}. \tag{1.4}$$

証明． まず，$y = \cos^{-1} x$ とすると $x = \cos y$ であるから，逆関数の微分公式から

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy} = \frac{-1}{\sin y}.$$

ここで $0 \leqq y \leqq \pi$ だから，$\sin y \geqq 0$ なので $\sin y = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ となり第 1 式を得る．第 2 式は例 1.7 の (1) と第 1 式から得られる．また，$\tan^{-1} x$ の微分公式を得るには例 1.5 の微分公式を用いればよい（問題 1-3）． □

ただし $\cos^{-1} x, \sin^{-1} x$ は $x = \pm 1$ で微分可能でない．

公式 (1.4) から

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x \tag{1.5}$$

が成り立つことがわかる．ただし第 2 式では $-1 \leqq x \leqq 1$ とする．とくに $\tan^{-1} 0 = 0, \sin^{-1} 0 = 0$ なので

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, \qquad \sin^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \tag{1.6}$$

が成り立つ．

[21] 例 1.7 (2) の第 2 式をマチン Machin の公式という．少し昔の円周率の高精度計算にはこの公式が用いられた（本節の「余談」参照）．

■ **初等関数**　多項式，冪関数 (x^α の形．冪乗根を含む)，指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数に加減乗除，合成の操作を**有限回**施すことによって得られる関数を**初等関数** [22] という．初等関数はその定義域に含まれる開区間上で何回でも微分可能（C^∞-級，第 3 回参照）である [23]．

微分公式から，初等関数の導関数は初等関数であることがすぐにわかるが，初等関数の原始関数は初等関数であるとは限らない．原始関数が初等関数で表されるような積分計算の基本テクニックを演習問題に挙げておく．

■ **双曲線関数**

定義 1.9. 実数 x に対して

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

をそれぞれ x の**双曲的余弦**，**双曲的正弦**，**双曲的正接**とよび，これらを**双曲線関数**という [24][25]．

双曲線関数は，指数関数を用いて表されるので，知らなくてもよいとも言えるが，さまざまな場面で使われるので，少なくとも「読めるように」なっていなければならない．

双曲線関数は三角関数と類似の次の性質をもつ：

命題 1.10. (1) 恒等式 $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ が成り立つ [26][27]．

(2) 加法定理：
$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$
$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$
$$\tanh(x+y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}.$$

[22] 初等関数：elementary functions.

[23] ただし冪乗根 $\sqrt[n]{x}$，非整数冪 x^α の定義域は $\{x | x > 0\}$ としておく．

[24] 双曲的余弦：hyperbolic cosine; 双曲的正弦：hyperbolic sine; 双曲的正接：hyperbolic tangent; 双曲線関数：hyperbolic functions.

[25] 双曲的余弦 $\cosh t$ と，角度 ht の余弦 $\cos ht$ を混同しないように．印刷物であれば，立体と斜体のフォントの使い分けで 明確に区別できる．

[26] 三角関数と同様に $\cosh^2 x$ は $(\cosh x)^2$ を表す．

[27] とくに $\big(x(t), y(t)\big) = (\cosh t, \sinh t)$ は xy 平面の双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ の右半分のパラメータ表示となる．これが双曲線関数の名前の由来である．

(3)　微分公式：

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \qquad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x,$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x = 1 - \tanh^2 x.$$

(4)　積分公式：

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x, \qquad \int \sinh x\,dx = \cosh x,$$
$$\int \tanh x\,dx = \log\cosh x.$$

余談：円周率の近似

実数 t に対して，初項 1, 公比 $-t^2$ の等比級数の和の公式

$$1 - t^2 + t^4 - \dots + (-1)^N t^{2N} = \frac{1-(-t^2)^{N+1}}{1+t^2} = \frac{1}{1+t^2} + \frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}$$

を $t=0$ から x まで定積分すると，式 (1.6) から

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x)$$
$$\left(R_N(x) = \int_0^x \frac{(-1)^{N+1}t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt\right)$$

を得る．ここで

$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \leqq \int_0^{|x|} t^{2N+2}\,dt = \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$
$$|R_N(x)| = \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+t^2}\,dt \geqq \int_0^{|x|} \frac{t^{2N+2}}{1+x^2}\,dt = \frac{1}{2N+3}\frac{|x|^{2N+3}}{1+x^2}$$

なので，

$$\text{(1.7)}\quad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^N}{2N+1}x^{2N+1} + R_N(x)$$
$$= \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}\right) + R_N(x),$$
$$\frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)(1+x^2)} \leqq |R_N(x)| \leqq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$

が成り立つ [28)]．とくに $|x| \leqq 1$ とすると

$$\lim_{N\to\infty} R_N(x) = 0 \qquad (-1 \leqq x \leqq 1 \text{ のとき})$$

が成り立つので，逆正接関数の無限級数表示が得られる：

$$\text{(1.8)}\qquad \tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1).$$

式 (1.8) で $x=1$ とすると，

$$\text{(1.9)}\qquad \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

が得られる．この右辺を適当な項まで計算すれば，円周率の近似値が得られる．式 (1.7) の $R_N(1)$ の形から

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \dots + \frac{(-1)^N}{2N+3}\right) + \widetilde{R}_N, \qquad \frac{2}{2N+3} \leqq |\widetilde{R}_N| \leqq \frac{4}{2N+3}$$

が成り立つことがわかる．この式を用いて円周率を小数 100 位まで求めることを考えよう：誤差 $|\widetilde{R}_N|$ が 10^{-100} を超えないようにするには $N \geqq 10^{100} - \frac{3}{2}$ が必要，$N \geqq 2\times 10^{100} - \frac{3}{2}$ が十分である [29)]．

一方，例 1.7 (2) の第 2 式（マチンの公式）の各項に公式 (1.7) を用いると，$\alpha = 1/5$, $\beta = 1/239$ として

$$\text{(1.10)}\quad \pi = 4\left(\sum_{k=0}^{M} \frac{4(-1)^k \alpha^{2k+1}}{2k+1} - \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j \beta^{2j+1}}{2j+1}\right) + R_{M,N},$$
$$|R_{M,N}| \leqq \frac{16\alpha^{2M+3}}{2M+3} + \frac{4\beta^{2N+3}}{2N+3}$$

となる．とくに $R_{M,N}$ が 10^{-100} を超えないためには $M=100$, $N=20$ くらいあれば十分である．公式 (1.9) を用いた計算と比較せよ．

問　題　1

1-1　次の対応は関数を与えるか：

(1)　実数 x に対して 3 乗すると x になるような実数 y を対応させる．

(2)　負でない実数 x に対して 4 乗すると x になるような実数 y を対応させる．

(3)　正の実数 x に対して $a^y = x$ となる y を対応させる．ただし a は正の定数である．

[28)] これは「微分積分学第二」で扱うテイラーの定理の特別な場合である．

[29)] この級数を 1 秒間に 10^{15} 項計算できる機械があったとすると，この機械を用いて円周率を 100 桁求めるには，3×10^{77} 年 以上かかる．太陽系の年齢が約 50 億 ($=5\times 10^8$) 年であることと比較せよ．TSUBAME の演算性能は Peta flops のオーダーと言われている．すなわち，1 秒間に 10^{15} 回程度の乗算ができる．ただし，一般に 100 桁程度の高い精度の演算はもっと時間がかかる．

(4) 実数 x に対して $x = \tan y$ をみたす y を対応させる．

(5) 実数 x に対して $x = \tan y$ かつ $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ をみたす y を対応させる．

1-2 逆三角関数，正割，余割，余接関数のグラフを描きなさい．

1-3 (1.2), (1.4) を確かめなさい．

1-4 (1) $\cosh x \geqq 1$, $-1 < \tanh x < 1$ であることを確かめなさい．

(2) $\cosh x$ は偶関数，$\sinh x$, $\tanh x$ は奇関数であることを確かめなさい．

(3) グラフ $y = \cosh x$, $y = \sinh x$, $y = \tanh x$ を描きなさい．

(4) 命題 1.10 を示しなさい．

(5) 三角関数にならって，双曲線関数の 2 倍角の公式，3 倍角の公式，半角の公式，積和公式，和積公式をつくりなさい．

(6) $t = \tanh \dfrac{u}{2}$ とおくとき，$\cosh u$, $\sinh u$ を t で表しなさい．

(7) A, B を定数とするとき，$A\cos t + B\sin t$ は $r\cos(t+\alpha)$, $r\sin(t+\beta)$ の形に表すことができる (合成公式)．これにならって，双曲線関数の合成公式をつくりなさい．

(8) $x \geqq 1$ を満たす x に対して，$x = \cosh y$, $y \geqq 0$ をみたす y を $y = \cosh^{-1} x$ と書くと

$$\cosh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2-1}\bigr)$$

となることを確かめなさい．同様に $\sinh^{-1} x$, $\tanh^{-1} x$ を定義し，

$$\sinh^{-1} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2+1}\bigr), \qquad \tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

であることを確かめなさい．

1-5 (1) マチンの公式（例 1.7 (2) の第 2 式）が成り立つことを確かめなさい．

(2) 式 (1.10) の $M = 2$, $N = 1$ として円周率の近似値を求めなさい．小数第何位まで正しい値が得られるか．

1-6 (1) $\log x = (x)' \log x$ であることを用いて $\log x$ の原始関数を求めなさい．

(2) $\cos^{-1} x$, $\sin^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ の原始関数を求めなさい．

1-7 負でない整数 n に対して $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$ とおく．とくに $n \geqq 2$ のとき $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$ が成り立つことを示し，

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{2m-1}{2m} \cdot \dfrac{2m-3}{2m-2} \cdots \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\pi}{2} & (n = 2m), \\ \dfrac{2m}{2m+1} \cdot \dfrac{2m-2}{2m-1} \cdots \dfrac{2}{3} & (n = 2m+1) \end{cases}$$

であることを確かめなさい．ただし m は正の整数である．さらに $\sin^n x$ の積分についても同様のことを行いなさい．

1-8 $\sqrt{1-x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい．

(1) $x = \sin\theta$ と置換する．

(2) $u = \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ と置換する．

1-9 $f(x) = (x-1)(x-2)(x+1)^2$ とするとき，$1/f(x)$ の原始関数を求めなさい (部分分数分解)．

1-10 定数 a, b に対して $1/(x^2 - 2ax + b)$ の原始関数を次の場合に求めなさい．

(1) $a^2 - b = 0$ の場合, すなわち $1/(x-a)^2$ の原始関数．

(2) $a^2 - b > 0$ の場合 (部分分数分解)．

(3) $a^2 - b < 0$ の場合：$1/(1+u^2)$ の原始関数に帰着させる．

1-11 正割，余割の積分公式 (1.3) を次のようにして導きなさい：

(1) $t = \tan \dfrac{x}{2}$ と置換すると被積分関数は t の有理式となるので，部分分数分解して積分する．

(2) $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1 - \sin^2 x}$ とおいて $u = \sin x$ と置換する．

(3) $\dfrac{1}{\cos x} = \cosh u$ と置換する．

1-12 関数 $1/\sqrt{1+x^2}$ の原始関数は次で与えられることを確かめなさい：

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(x + \sqrt{1+x^2}) = \sinh^{-1} x.$$

1-13 $\sqrt{1+x^2}$ の原始関数を次のようにして求めなさい：

(1) $(x)'\sqrt{1+x^2}$ とみなして部分積分を行うことにより，$1/\sqrt{1+x^2}$ の積分に帰着する．

(2) $x = \tan\theta$ と置換する．

(3) $x = \sinh u$ と置換する．

1-14 次の関数の原始関数を求めなさい：

$$\frac{1}{1-x^4}, \qquad \frac{1}{1-x^3}, \qquad \frac{1}{1+x^4}.$$

1-15 地球 (半径 R メートルの正確な球と仮定する) の赤道の周囲にゴムひもを巻き，その 1 箇所をつまんで 1 メートル持ち上げるとき，ゴムひもはどれくらい伸びるか．R を用いて表しなさい．さらに，R の具体的な値 (1 メートルが定義されたときのいきさつからすぐにわかる) を用いて，伸びを実際に求めなさい：関数電卓を用いるとどのような値になるか．その答えは何桁目まで正しいか．さらに，手計算で値を求めるためにはどうしたらよいか．