4. チェイン・ルール

4.1 行列とベクトルの演算

2 変数，3 変数の関数を扱う際に必要なベクトル・行列[1] の演算をまとめておく．ここでは数（**スカラ**）は実数とする．

数を n 個横に並べたものを n 次**行ベクトル**，縦に並べたものを n 次**列ベクトル**という[2]．たとえば

$$(1,2),\qquad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\qquad (1,2,3),\qquad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

はそれぞれ 2 次行ベクトル，2 次列ベクトル，3 次行ベクトル，3 次列ベクトルである．この講義では，ベクトルを通常**列ベクトルの形**に表し，一つの文字で表すときは，ローマ文字の太字を用いる：

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}={}^t(x_1,x_2),\qquad {}^t\boldsymbol{x}=(x_1,x_2).$$

ここで ${}^t(*)$ は，行（列）ベクトルの各成分を縦（横）に並べ直す操作（**転置**）を表す[3]．一方，第 3 回の (3.6) のように全微分は行ベクトルを用いて表す．行ベクトルと列ベクトルの**積**を次のように定める（順番に注意）：

$$(x_1,x_2)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2,\quad (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3.$$

高等学校で学んだベクトルの内積は $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}={}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ と表すことができる．

数を 2×2 (3×3) の正方形にならべたものを 2 次（3 次）**正方行列**という[4]．以下簡単のために次数を 2 に限るが，3 次の場合も想像してほしい．

ここでは，正方行列を表すのにローマ文字の大文字を用いる．行列 A を

[*] 2015 年 7 月 3 日/7 日

[1] ベクトル：a vector, 英語の発音から “ヴェクタ” と読むべきな気がする．行列：a matrix, matrices. 行列の一般論や詳細は「線形代数学第一」で扱う．

[2] スカラ：a scalar; 行ベクトル：a row vector; 列ベクトル：a column vector.

[3] 転置：transposition.

[4] 正方行列：a square matrix.

(4.1)
$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2)\qquad\left(\boldsymbol{a}_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{a}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}\right)$$
$$=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}\alpha_1=(a_{11},a_{12})\\\alpha_2=(a_{21},a_{22})\end{pmatrix}$$

と書くとき，第一行の右辺の式を行列 A の**列ベクトルへの分解**，第二行の式を**行ベクトルへの分解**という．

正方行列 A を (4.1) のように表すとき，これに列ベクトル $\boldsymbol{x}$, 行ベクトル ξ を掛ける演算を次のように定義する：

$$A\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\alpha_1\boldsymbol{x}\\\alpha_2\boldsymbol{x}\end{pmatrix},\qquad \xi A=(\xi\boldsymbol{a}_1,\xi\boldsymbol{a}_2).$$

これを用いて正方行列 A と B の積を次のように定める：

$$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1\boldsymbol{b}_1&\alpha_1\boldsymbol{b}_2\\\alpha_2\boldsymbol{b}_1&\alpha_2\boldsymbol{b}_2\end{pmatrix}\qquad\left(A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{pmatrix},\ B=(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2)\right).$$

正方行列と列ベクトルの積は列ベクトル，行ベクトルと正方行列の積は行ベクトル，正方行列と正方行列の積は正方行列である．

2 次正方行列 A に対して

(4.2)
$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\qquad\left(E:=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$$

をみたす正方行列 A^{-1} が存在するとき，A は**正則行列である**といい，A^{-1} を A の**逆行列**という．ここで E は 2 次の**単位行列**といい，次の性質を満たす[5]：任意の 2 次列ベクトル $\boldsymbol{x}$，2 次行ベクトル ξ, 2 次正方行列 A に対して

(4.3)
$$E\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x},\qquad \xi E=\xi,\qquad EA=AE=A.$$

式 (4.1) の形の A に対して

(4.4)
$$\det A:=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

で定まるスカラ $\det A$ を A の**行列式**とよぶ[6]．行列 A が正則であるための必要十分条件は $\det A\neq 0$ であり，このとき，A^{-1} は次のように表される．

(4.5)
$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}.$$

[5] 正則行列：a regular matrix; 逆行列：the inverse matrix; 単位行列：the identity matrix.

[6] 行列式: determinant.

4.2 方向微分

ここでは 2 変数関数 $f(x,y)$ を，ベクトル $\boldsymbol{x} = {}^t(x,y)$ に対して数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x,y)$ を対応させる規則だと見なす[7]．例 3.22 の (1) で挙げた，点 $P = {}^t(a,b)$ を出発して一定の速度 $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1,v_2)$ で動く点の運動 $\gamma(t)$ を考えよう：

$$\gamma(t) = P + t\boldsymbol{v} = {}^t\bigl(a + v_1 t, b + v_2 t\bigr).$$

定義 4.1. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された関数 f が，点 $P = (a,b) \in D$ において $\boldsymbol{v} = {}^t(v_1,v_2)$ 方向に**方向微分可能**であるとは，1 変数関数

$$F(t) := f(a + v_1 t, b + v_2 t) = f(P + t\boldsymbol{v})$$

が $t = 0$ で微分可能となることである．このとき，微分係数 $F'(0)$ を f の P における $\boldsymbol{v}$ 方向の**方向微分**といい[8]，どんなベクトル $\boldsymbol{v}$ に対しても $\boldsymbol{v}$ 方向に方向微分可能なとき，f は P で**方向微分可能**という．

命題 3.23 から次がわかる：

命題 4.2. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の関数 f が $P = (a,b) \in D$ で微分可能ならば f は P で方向微分可能である．とくに $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分は次で与えられる：

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)v_2 \qquad \Bigl(\boldsymbol{v} = {}^t(v_1,v_2)\Bigr). \tag{4.6}$$

■ **勾配ベクトル** 点 P を含む領域で定義された微分可能な関数 f に対して

$$\operatorname{grad} f_P := \begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix} = {}^t\bigl((df)_P\bigr)$$

で定まるベクトルを f の P における**勾配ベクトル**という[9]．これを用いると，方向微分 (4.6) は内積 "$\cdot$" を用いて

$$(df)_P\boldsymbol{v} = \bigl(\operatorname{grad} f_P\bigr) \cdot \boldsymbol{v}$$

と表すことができる．勾配ベクトル $\operatorname{grad} f_P$ が零ベクトルでないとき，このベクトルは P を通る f の等高線に垂直な方向を与えている（問題 4-4）．

[7] 関数の定義域の点の座標は行ベクトルで表したが，これからしばらくの間は列ベクトルで表すことにする．
[8] 方向微分：the directional derivative.
[9] 勾配ベクトル：the gradient vector.

4.3 合成関数の微分 (チェイン・ルール)

曲線に沿う微分の公式（命題 3.23）と偏微分の意味から直ちに次のことがわかる：

定理 4.3 (チェイン・ルール[10])**.** 2 変数関数 $f(x,y)$ と，2 つの 2 変数関数

$$x = x(\xi,\eta), \qquad y = y(\xi,\eta)$$

がともに微分可能であるとき[11]，2 変数関数

$$\tilde{f}(\xi,\eta) = f\bigl(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)\bigr)$$

は微分可能で，次が成り立つ：

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \xi}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \xi}(\xi,\eta)$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \eta}(\xi,\eta) = \frac{\partial f}{\partial x}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial x}{\partial \eta}(\xi,\eta) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)\frac{\partial y}{\partial \eta}(\xi,\eta).$$

注意 4.4. 物理学や工学では，定理 4.3 の $\tilde{f}(\xi,\eta)$ のことを $f(x,y)$ と同じ f を用いて $f(\xi,\eta)$ のように表すことがある．文脈で独立変数がはっきりわかるのならこの記法が便利である．このとき (適当に省略して) 定理 4.3 の結論を

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}$$

と表すことができる．さらに，従属変数に名前をつけて

$$z = f(x,y) = f\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr) = \tilde{f}(\xi,\eta)$$

と表して次のように書くこともできる：

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}, \qquad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}.$$

■ **$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とその微分** 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \mathbb{R}^2$ を考える．これは D の各点 (x,y) に対して $\mathbb{R}^2$ の要素 $F(x,y)$ を対応させる対応の規則である．$F(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の要素だから，それを (ξ,η) と書けば，各 ξ, η は (x,y) の関数だから，写像 $F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ とは領域

[10] チェイン・ルール：the chain rule.
[11] ξ: xi; η: eta. ギリシア文字 ξ, η, ζ (zeta) はしばしばローマ文字 (x,y,z) の対応物として使われる．

$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 個の関数の組とみなすことができる：

$$F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \ni (x,y) \longmapsto \big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.7}$$

このとき，2 つの 2 変数関数 $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ を F の**成分**とよぶ [12]．式が長くなるのを避けるために，ベクトル記法を用いて

$$\boldsymbol{\xi} = F(\boldsymbol{x}) \qquad \big(\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta),\ \boldsymbol{x} = (x,y)\big)$$

などと書くことがある．写像 $F = (\xi,\eta)\colon \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ が C^k**-級** であるとは [13]，各成分 ξ, η が C^k-級 (26 ページ）となることである．

定義 4.5. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^1-級写像 $F = (\xi,\eta)\colon D \to \mathbb{R}^n$ に対して

$$dF = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix}$$

で与えられる 2 次正方行列を F の**微分**または**ヤコビ行列** という [14]．

■ 合成写像・逆写像とその微分　領域 D, $U \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された写像 $F\colon D \to \mathbb{R}^2$，$G\colon U \to \mathbb{R}^2$ が，任意の $\boldsymbol{x} = (x,y) \in D$ に対して $F(\boldsymbol{x}) \in U$ をみたすとき，

$$G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto G\big(F(\boldsymbol{x})\big) \in \mathbb{R}^2$$

で与えられる写像 $G \circ F\colon \mathbb{R}^2 \supset D \to \mathbb{R}^2$ を F と G の**合成写像** [15] という．

命題 4.6. 上の状況で，F, G がともに C^1-級ならば

$$d(G \circ F) = dG\,dF, \qquad \text{すなわち} \qquad d(G\circ F)(\boldsymbol{x}) = dG\big(F(\boldsymbol{x})\big)\,dF(\boldsymbol{x})$$

が成り立つ．ただし右辺の積は行列の積を表す．

領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ の各点 $\boldsymbol{x}$ に対してそれ自身を対応させる写像

$$\mathrm{id}_D\colon D \ni \boldsymbol{x} \longmapsto \mathrm{id}_D(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \in D$$

を D 上の**恒等写像** [16] という．領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ から $U \subset \mathbb{R}^2$ への写像 $F\colon D \to$

[12] 写像：a map；成分: components.
[13] 本来なら微分可能性から定義していくべきだが，簡単のため C^k-級の概念だけを定義しておく．こういうもののみを考えていても実用上はほとんど問題がない．
[14] 微分：the differential；ヤコビ行列：the Jacobian matrix；ヤコビ：Jacobi, Carl Gustav Jacob (1804–1851, D).
[15] 合成：the composition.
[16] 恒等写像：the identity map；定義域 D が文脈より自明な場合は，id_D を単に id と書く場合がある．

U に対して，$G \circ F = \mathrm{id}_D$, $F \circ G = \mathrm{id}_U$ をみたす写像 $G\colon U \to D$ が存在するとき，G を F の**逆写像**といい，$G = F^{-1}$ と書く [17]．

例 4.7. 領域

$$D = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \,|\, r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\}$$

に対して

$$F\colon D \ni (r,\theta) \longmapsto F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \in U,$$
$$G\colon U \ni (x,y) \longmapsto G(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) \in D$$

とすると $G = F^{-1}$, $F = G^{-1}$ である．実際, $(r,\theta) \in D$ に対して $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ なので $\tan^{-1}\tan\theta = \theta$（定義 1.6 参照）だから，$r > 0$ に注意すれば

$$G \circ F(r,\theta) = G(r\cos\theta, r\sin\theta) = \left(\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}, \tan^{-1}\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)$$
$$= (r, \tan^{-1}\tan\theta) = (r,\theta) = \mathrm{id}_D(r,\theta).$$

一方，$\theta = \tan^{-1}(y/x)$ とすると，逆正接関数の定義から $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ だから $\cos\theta > 0$．したがって，$x > 0$ に注意して

$$\cos\tan^{-1}\frac{y}{x} = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\tan^{-1}\frac{y}{x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}}$$
$$= \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\tan^{-1}\frac{y}{x} = \sin\theta = \cos\theta\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{y}{x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

これらから $F \circ G(x,y) = F\left(\sqrt{x^2+y^2}, \tan^{-1}\frac{y}{x}\right) = (x,y) = \mathrm{id}_U(x,y)$.　◇

注意 4.8. 座標平面上の点 (x,y) に対して例 4.7 のように $(r,\theta) = G(x,y)$ と定めるとき, (r,θ) を座標平面の**極座標**という．これに対して，(x,y) を**直交座標系** あるいは **デカルト座標系**という [18]．

[17] 逆写像：the inverse map; F^{-1}: the inverse of F/F-inverse;
[18] 極座標：the polar coordinate system; 直交座標系：the orthognonal cooridnate system; デカルト座標系：the Cartesian coordinate system; デカルト：: Descartes, René (Renatus Cartesius; 1596–1650).

例 4.7 の表示では，(x,y) 平面の右半分しか極座標で表示できないが，通常は次のように平面のほぼ全体を表せるように拡張する：領域

$$\widetilde{D} = \{(r,\theta)\,|\,r>0, -\pi<\theta<\pi\}, \quad \widetilde{U} = \{(x,y)\,|\,y\neq 0 \text{ または } x>0\}$$

を考え，$h\colon \widetilde{U}\to\mathbb{R}$ を

$$h(x,y) := \begin{cases} \tan^{-1}\dfrac{y}{x} & (x>0) \\ -\tan^{-1}\dfrac{x}{y}+\dfrac{\pi}{2} & (x\leqq 0, y>0) \\ -\tan^{-1}\dfrac{x}{y}-\dfrac{\pi}{2} & (x\leqq 0, y<0) \end{cases}$$

と定め [19]，

$$\widetilde{F}\colon \widetilde{D}\ni(r,\theta)\longmapsto \widetilde{F}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta)\in\widetilde{U},$$
$$\widetilde{G}\colon \widetilde{U}\ni(x,y)\longmapsto \widetilde{G}(x,y)=\left(\sqrt{x^2+y^2}, h(x,y)\right)\in\widetilde{D}$$

とおけば $\widetilde{F}=\widetilde{G}^{-1}$，$\widetilde{G}=\widetilde{F}^{-1}$ となる．座標平面上の点 (x,y) に対応する $(r,\theta)=\widetilde{G}(x,y)$ を (x,y) の極座標という．

命題 4.9. 写像 $F\colon\mathbb{R}^2\supset D\to U\subset\mathbb{R}^2$ が逆写像 $G=F^{-1}$ をもち，F，F^{-1} ともに C^1-級ならば，

$$dF^{-1}=(dF)^{-1} \qquad \text{すなわち} \qquad d(F^{-1})\bigl(F(\boldsymbol{x})\bigr)=\bigl(dF(\boldsymbol{x})\bigr)^{-1}$$

が成り立つ．ただし右辺の “−1” は 正方行列の逆行列を表す．

証明． 恒等写像の微分が単位行列 E となることに注意して，$F^{-1}\circ F=\mathrm{id}_D$ に命題 4.6 を適用すれば $dF^{-1}dF=E$，また $F\circ F^{-1}=\mathrm{id}_U$ に命題 4.6 を適用すれば $dFdF^{-1}=E$．したがって dF^{-1} は dF の逆行列である． □

■ 変数変換

例 4.10 (平面極座標とラプラシアン)**.** 例 4.7 の状況を考える：

$$x=x(r,\theta)=r\cos\theta, \qquad y=y(r,\theta)=r\sin\theta. \tag{4.8}$$

このとき $F\colon(r,\theta)\mapsto(x,y)$ の微分（定義 4.5）は

$$dF=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}, \tag{4.9}$$

[19] $h(x,y)$ は原点 $(0,0)$ と点 (x,y) を結ぶ平面上の有向線分が x 軸の正の部分と成す角を表している．この関数は，たとえば C や Fortran などでは `atan2(x,y)` という関数として実装されている．

だから，その逆写像 $G=F^{-1}$ の微分は，命題 4.9 と逆行列の公式 (4.5) から

$$dG=\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y\end{pmatrix}=(dF)^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{1}{r}\sin\theta & \frac{1}{r}\cos\theta\end{pmatrix} \tag{4.10}$$

となる．したがって

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}=\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}. \tag{4.11}$$

平面上の C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

$$\Delta z=\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \tag{4.12}$$

を対応させる Δ を**ラプラス作用素**または**ラプラシアン**という（例 2.10）．いま，$f(x,y)$ を (4.8) によって (r,θ) の関数とみなしたとき，Δf を f の r, θ に関する偏導関数を用いて表そう．式 (4.11) を用いれば

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\cos^2\theta f_{rr}-\frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta}+\frac{1}{r^2}\sin^2\theta f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}\sin^2\theta f_r+\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\sin^2\theta f_{rr}+\frac{2}{r}\cos\theta\sin\theta f_{r\theta}+\frac{1}{r^2}\cos^2\theta f_{\theta\theta}+\frac{1}{r}\cos^2\theta f_r-\frac{2}{r^2}\sin\theta\cos\theta f_\theta$$

なので，次を得る．

$$\Delta f=f_{xx}+f_{yy}=f_{rr}+\frac{1}{r}f_r+\frac{1}{r^2}f_{\theta\theta}. \qquad \diamondsuit \tag{4.13}$$

4.4 陰関数

領域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上で定義された 2 変数関数 $F(x,y)$ に対して，式 $F(x,y)=0$ は x と y の関係式である．これを “y について解く” ことができたとしよう：

$$F(x,y)=0 \qquad\Longleftrightarrow\qquad y=\varphi(x).$$

このとき，関係式 $F(x,y)=0$ は関数 $y=\varphi(x)$ を暗に表しているので，$y=\varphi(x)$ の**陰関数** [20] 表示という．

例 4.11. (1) $F(x,y)=2x-3y+5$ とすると，$F(x,y)=0$ は $y=\frac{1}{3}(2x+5)$ と書ける．また，同じ式は $x=\frac{1}{2}(3y-5)$ とも書ける．

(2) $F(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと，関係式 $F(x,y)=0$ は y について解

[20] 陰関数：an implicit function.

けない．しかし，F の定義域を $U := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ に限ると

$$(x, y) \in U \text{ かつ } F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \sqrt{1 - x^2} \quad (-1 < x < 1)$$

と，y は x の関数とみなせる．同様に定義域を $U' := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ に限れば，関係式は関数 $y = -\sqrt{1 - x^2}$ を与える．また，定義域を $\{(x, y) | x > 0\}$ とすれば，$F(x, y) = 0$ は $x = \sqrt{1 - y^2}$ と書ける． ♢

■ 陰関数定理　一般に $f(x, y) = 0$ が y についてとけるか否かを判定するのは難しいが，次の十分条件が知られている：

定理 4.12 (陰関数定理の特別な場合)**.** 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^k-級関数 $F\colon D \to \mathbb{R}$ と $F(x_0, y_0) = 0$ をみたす点 $(x_0, y_0) \in D$ をとる．もし，$F_y(x_0, y_0) \neq 0$ が成り立っているならば，P を含む領域 $U \subset D$ と，$\mathbb{R}$ のある開区間 I 上で定義された C^k-級の 1 変数関数 $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ で次をみたすものが存在する：

$$(x, y) \in U \quad \text{かつ} \quad F(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in I \quad \text{かつ} \quad y = \varphi(x).$$

とくに各 $x \in I$ に対して $F\bigl(x, \varphi(x)\bigr) = 0$ が成立する．

定理の結論は，P の十分近くで，$F(x, y) = 0$ が y について解けることを表している．また，定理 4.12 で変数 x と y の役割を取り替えれば，$F_x(P) \neq 0$ ならば P の近くで $F(x, y) = 0$ は x について解けることもわかる．

変数の個数が多いときも同様の性質が成り立つ．

例 4.13. $\mathbb{R}^3$ で定義された 3 変数関数 $F(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1$ は C^∞-級である．点 $P = (0, 0, 1)$ は $F(P) = 0$ をみたしているが，さらにまた $F_z(P) = 2 \neq 0$ が成り立つ．このとき，$U := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z > 0\}$, $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ とすると，

$$F(x, y, z) = 0 \text{ かつ } (x, y, z) \in U \Leftrightarrow z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ かつ } (x, y) \in V$$

となる．すなわち $F(x, y, z) = 0$ は z について解ける．集合 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x, y, z) = 0\}$ は $\mathbb{R}^3$ の原点を中心とする半径 1 の球面だが，関係式を z について解いて，“北半球” のグラフ表示が得られたことになる [21]． ♢

[21] 球面：a sphere; これは球の表面を表す．中身の詰まった球は，単に球 a ball，あるいは球体という．北半球：the Northern Hemisphere.

■ なめらかな曲線　領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上の C^∞-級関数 F に対して，集合 $C = \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$ を考える．点 $P \in C$ に対して，P を含む $\mathbb{R}^2$ の領域 U をうまくとれば，共通部分 $C \cap U$ が C^∞-級関数のグラフと合同となるとき，C は P の近くで**なめらかな曲線** [22] であるということにする．各点の近くでなめらかな曲線であるとき C を単に**なめらかな曲線**であるという．

例 4.14. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ は原点を中心とする半径 1 の円 [23] となるが，これはなめらかな曲線である．実際，点 $P \in C$ は

$$U_1 := \{(x, y) \mid y > 0\}, \qquad U_2 := \{(x, y) \mid y < 0\},$$
$$U_3 := \{(x, y) \mid x > 0\}, \qquad U_4 := \{(x, y) \mid x < 0\}$$

のいずれかの要素となるが，各 $j = 1, 2, 3, 4$ に対して $C \cap U_j$ は C^∞-級関数 $\sqrt{1 - x^2}$ $(-1 < x < 1)$ のグラフと合同である． ♢

定理 4.12 から次がすぐにわかる：

命題 4.15. 領域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で定義された C^∞-級関数 F に対して $C := \{(x, y) \in D \mid F(x, y) = 0\}$ とおく．各 $P \in C$ で $(dF)_P \neq (0, 0)$ ならば C はなめらかな曲線である．

例 4.16. 関数 $F(x, y) := 2(x^2 - y^2) - (x^2 + y^2)^2$ に対して

$$dF_{(x,y)} = \bigl(4x(1 - x^2 - y^2), -4y(1 + x^2 + y^2)\bigr)$$

だから $dF_{(x,y)} = (0, 0)$ となるのは $(x, y) = (0, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ のときのみである．とくに $F(\pm 1, 0) \neq 0$, $F(0, 0) = 0$ なので，$C = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ は $(0, 0)$ の近くをのぞいてなめらかな曲線である．この曲線は**レムニスケート** [24] とよばれる（問題 4-9 の $a = 0$ の場合）． ♢

■ 陰関数の微分法

命題 4.17. 定理 4.12 の状況で $F(x, y) = 0$ が $y = \varphi(x)$ の陰関数表示となっているとき，次が成り立つ：

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \Big/ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \qquad \bigl(y = \varphi(x)\bigr).$$

[22] なめらかな曲線：a smooth curve.
[23] 円：a circle; 原点を中心とする半径 1 の円：the circle centered at the origin with radius 1.
[24] レムニスケート：the lemniscate.

証明. 恒等式 $F(x,\varphi(x))=0$ の両辺を x で微分すると，命題 3.23（定理 4.3）により

$$0=\frac{d}{dx}F\bigl(x,\varphi(x)\bigr)=\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}(x,\varphi(x))\frac{d\varphi(x)}{dx}$$
$$=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

定理 4.12 の仮定から，考えている点の近くで $F_y\neq 0$ だから結論を得る． □

命題 4.17 の結論の式を次のように書くこともある：$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$.

同様に，$F(x,y)=0$ が $x=\psi(y)$ の陰関数表示で，$F_x\neq 0$ であるとき，

$$\frac{d\psi}{dy}(y)=-\frac{F_y(x,y)}{F_x(x,y)}\quad\bigl(x=\psi(y)\bigr)\quad\text{すなわち}\quad\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}.$$

問　題　4

4-1　命題 4.2 を確かめなさい．

4-2　平面上の点 (x,y) における標高が，多項式 $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ で表されているような世界があるとする．この世界を，原点を中心とする半径 1 の円に沿って，反時計回りに速さ 1 で歩くとき，この旅はどのようなものになるか．すなわち，上り坂，下り坂になる経路上の部分を指摘しなさい．ヒント：考えている旅は例 3.22 の (2) である．

4-3　点 $P=(a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．このとき，f の点 P における単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ 方向の方向微分 $(df)_P(\boldsymbol{v})$ が最大になるのは $\boldsymbol{v}$ が $(\operatorname{grad}_f)_P$ と同じ向きに平行なときである．このことを示しなさい．ヒント：$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトルであることに注意．

4-4　点 $P=(a,b)$ を含む領域で定義された 2 変数関数 f の P における全微分 $(df)_P$ は $(0,0)$ でないとする．点 P を通る f の等高線を $\gamma(t)=\bigl(x(t),y(t)\bigr)$ $(\gamma(0)=P)$ とパラメータ表示するとき，$t=0$ における γ の速度ベクトル $\dot\gamma(0)$ は $(\operatorname{grad}f)_P$ に直交することを示しなさい．すなわち，“等高線は勾配ベクトルに直交する”．

4-5　定数 $c\ (\neq 0)$ に対して $\xi=x+ct$, $\eta=x-ct$ により変数変換 $(t,x)\mapsto(\xi,\eta)$ を定める．このとき，C^2-級関数 $f(t,x)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-4c^2\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}$$

となることを確かめなさい．さらに，$f_{tt}-c^2f_{xx}=0$ を満たす C^2-級関数 f は，2 つの C^2-級の 1 変数関数 F,G を用いて $f(t,x)=F(x+ct)+G(x-ct)$ という形に書けることを示しなさい．

方程式 $f_{tt}=c^2f_{xx}$ を**波動方程式**という（例 2.12）．ここに述べたことを，“波動方程式のダランベールの解法 [25]” という（第 2 回の問題 2-11）．

4-6　空間のスカラ場 $f(x,y,z)$ に対して $\Delta f=f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$ を対応させる Δ を空間の**ラプラス作用素**という（第 2 回の問題 2-13）．空間の変数変換

$$x=r\cos\theta\cos\varphi,\qquad y=r\sin\theta\cos\varphi,\qquad z=r\sin\varphi$$
$$\left(r>0,-\pi<\theta<\pi,-\tfrac{\pi}{2}<\varphi<\tfrac{\pi}{2}\right)$$

に対して

$$\begin{pmatrix}r_x & r_y & r_z\\ \theta_x & \theta_y & \theta_z\\ \varphi_x & \varphi_y & \varphi_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\cos\varphi} & \frac{1}{r}\frac{\cos\theta}{\cos\varphi} & 0\\ -\frac{1}{r}\cos\theta\sin\varphi & -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi & \frac{1}{r}\cos\varphi\end{pmatrix}$$

であることを確かめ，

$$\Delta f=f_{rr}+\frac{2}{r}f_r+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}f_{\theta\theta}+\frac{1}{r^2}f_{\varphi\varphi}-\frac{1}{r^2}\tan\varphi f_\varphi$$

となることを確かめなさい．

4-7　$F(x,y)=x^2-y^3$ とするとき $F(x,y)=0$ で与えられる $\mathbb{R}^2$ の部分集合はなめらかな曲線であるかを調べ，この図形の形を描きなさい．

4-8　定理 4.12 の状況，すなわち $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid F(x,y)=0\}$ の点 $P=(x_0,y_0)$ において $F_y\neq 0$ であり，P の近くで C がグラフ $y=\varphi(x)$ と表されているとする．このとき次を示しなさい：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi''(x)=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

ただし，右辺の F_{xx} などは $(x,\varphi(x))$ における値を表す．

4-9　定数 a に対して $F(x,y)=2(x^2-y^2)-(x^2+y^2)^2-a$, $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid F(x,y)=0\}$ とおく．このとき C がグラフ $y=\varphi(x)$ と書けるような範囲を調べ，そこでの φ の増減，変曲点を調べ C の形を描きなさい（ヒント：a の値によって場合分けが起きる）．

4-10　$\mathbb{R}^3$ の領域 D 上で定義された C^∞ 級の 3 変数関数 $F(x,y,z)$ を用いて関係式 $F(x,y,z)=0$ を考える．とくに，点 $P=(a,b,c)$ において $F(P)=F(a,b,c)=0$ が成り立ち，さらに，P において F_x, F_y, F_z のいずれもが 0 でないとする．このとき，P の近くで $F(x,y,z)=0$ は x, y, z のいずれの変数についても解くことができる：

$$F(x,y,z)=0\qquad\Leftrightarrow\qquad x=\xi(y,z),\quad y=\eta(z,x),\quad z=\zeta(x,y).$$

点 P の近くで $F(x,y,z)=0$ が成り立っているとき，

$$\frac{\partial\xi}{\partial y}(y,z)\cdot\frac{\partial\eta}{\partial z}(z,x)\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x}(y,z)=-1\quad\text{すなわち}\quad\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

であることを確かめなさい．

[25] ダランベール：d’Alembert, Jean Le Rond (1717–1783, F).