2015 年 12 月 08 日 11 時 00 分 ~12 時 00 分
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 予備試験 〔問題 1〕

注意事項
- 「微分積分学第一」および「高等学校の数学」の理解の程度を確かめる試験です.
- 答案は 12 月 11 日に返却予定, 9 日の演習で解説します.
- この試験の結果は成績に無関係ですが, 不真面目な答案が多いと担当者の機嫌を損ねます.

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{15}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい. [30 点]

$\xi\eta$ 平面の領域 $\widetilde{D}=\left\{(\xi,\eta)\,|\,\xi>0,-\frac{\pi}{2}<\eta<\frac{\pi}{2}\right\}$ 上で定義された関数

$$x=x(\xi,\eta):=\xi\cos\eta,\qquad y=y(\xi,\eta):=\xi\sin\eta \tag{1}$$

を考えると, 対応 $(\xi,\eta)\mapsto(x,y)$ は $\widetilde{D}$ と xy 平面の領域 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>0,x>0\right\}$ の 1 対 1 の対応を与える. とくに, (1) を ξ,η について解いて次のように表す:

$$\xi=\xi(x,y),\qquad \eta=\eta(x,y). \tag{2}$$

いま (1) の $x(\xi,\eta)$ の偏導関数は $\boxed{1}$, $y(\xi,\eta)$ の偏導関数は $\boxed{2}$ であるから, (2) の $\xi(x,y)$ の偏導関数を ξ,η の式で表すと $\boxed{3}$, $\eta(x,y)$ の偏導関数を ξ,η の式で表すと $\boxed{4}$ となる. ここで, D 上で定義された C^2-級関数 $f(x,y)$ に対して

$$\tilde{f}(\xi,\eta)=f\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr) \tag{3}$$

と定めると, 偏導関数 f_x, f_y の $\bigl(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta)\bigr)$ における値は, $\tilde{f}$ の偏導関数を用いて $f_x=\boxed{5}\tilde{f}_\xi+\boxed{6}\tilde{f}_\eta$, $f_y=\boxed{7}\tilde{f}_\xi+\boxed{8}\tilde{f}_\eta$ と書ける. さらに f_{xx}, f_{yy} を $\tilde{f}$ の 2 階までの偏導関数で表すと $f_{xx}=\boxed{9}$, $f_{yy}=\boxed{10}$ なので $f_{xx}+f_{yy}=\boxed{11}$ となる.
偏微分方程式 $\Delta f:=f_{xx}+f_{yy}=0$ をみたす関数 f を調和関数という. 調和関数 f に対して (3) の $\tilde{f}$ が ξ のみの関数になっているならば $\tilde{f}=\boxed{12}$, すなわち $f=\boxed{13}$ となり, また, η のみの関数になっているならば $\tilde{f}=\boxed{14}$ すなわち $f=\boxed{15}$ となる.

問題 B 次の文中の $\boxed{1}$～$\boxed{11}$ にもっともよく充てはまる数・式を入れなさい. [15 点]

重積分 $I:=\displaystyle\iint_D x\,dx\,dy$ $(D:=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 2x\right\})$ を累次積分で表すと,

$$I=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\left[\int_{\boxed{3}}^{\boxed{4}}x\,dx\right]dy=\int_{\boxed{1}}^{\boxed{2}}\boxed{5}\,dy,\quad I=\int_{\boxed{6}}^{\boxed{7}}\left[\int_{\boxed{8}}^{\boxed{9}}x\,dy\right]dx=\int_{\boxed{6}}^{\boxed{7}}\boxed{10}\,dx$$

である [1]. したがって $I=\boxed{11}$ であることがわかる.

問題 C 次の問に答えなさい: [15 点]

(1) 次の関数の $x=0$ における微分係数が存在するなら求めなさい: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0).\end{cases}$

(2) 平均値の定理を述べなさい.

(3) 無限小数 $0.999\ldots$ と 1 は等しいか, 理由をつけて答えなさい.

問題 D [0 点] この授業に関するご意見, ご希望がありましたらお書きください. 回答の内容が成績に影響することは一切ありません.

ご協力ありがとうございました ♡

[1] 問題 B: $\boxed{5}$, $\boxed{10}$ には x, y の一方のみを含む式を入れる.

微分積分学第二 B 予備試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 1–2：5 点，3–4：5 点，5–8：5 点，9–11：5 点，12–13：5 点，14–15：5 点

1. $x_\xi = \cos\eta,\ x_\eta = -\xi\sin\eta$
2. $y_\xi = \sin\eta,\ y_\eta = \xi\cos\eta$
3. $\xi_x = \cos\eta,\ \xi_y = \sin\eta$
4. $\eta_x = -\frac{1}{\xi}\sin\eta,\ \eta_y = \frac{1}{\xi}\cos\eta$
5. $\cos\eta$
6. $-\frac{1}{\xi}\sin\eta$
7. $\sin\eta$
8. $\frac{1}{\xi}\cos\eta$
9. $$\cos^2\eta\tilde{f}_{\xi\xi} - \frac{2\cos\eta\sin\eta}{\xi}\tilde{f}_{\xi\eta} + \frac{2\cos\eta\sin\eta}{\xi^2}\tilde{f}_\eta + \frac{\sin^2\eta}{\xi}\tilde{f}_\xi + \frac{\sin^2\eta}{\xi^2}\tilde{f}_{\eta\eta}$$
10. $$\sin^2\eta\tilde{f}_{\xi\xi} + \frac{2\cos\eta\sin\eta}{\xi}\tilde{f}_{\xi\eta} - \frac{2\cos\eta\sin\eta}{\xi^2}\tilde{f}_\eta + \frac{\cos^2\eta}{\xi}\tilde{f}_\xi + \frac{\cos^2\eta}{\xi^2}\tilde{f}_{\eta\eta}$$
11. $$\tilde{f}_{\xi\xi} + \frac{1}{\xi}\tilde{f}_\xi + \frac{1}{\xi^2}\tilde{f}_{\eta\eta}$$
12. $a\log\xi + b$ (a, b は定数)
13. $a\log\sqrt{x^2+y^2} + b$ (a, b は定数)
14. $a\eta + b$ (a, b は定数)
15. $a\tan^{-1}\dfrac{y}{x} + b$ (a, b は定数)

問題 B の解答欄 1–5：5 点，6–10：5 点，11：5 点

1. -1
2. 1
3. $1-\sqrt{1-y^2}$
4. $1+\sqrt{1-y^2}$
5. $2\sqrt{1-y^2}$
6. 0
7. 2
8. $-\sqrt{x(2-x)}$
9. $\sqrt{x(2-x)}$
10. $2x\sqrt{x(2-x)}$
11. π

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 B 予備試験 〔解答用紙 2〕

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

(1)

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\sin\frac{1}{h}+\frac{1}{2}h-0}{h}=h\sin\frac{1}{h}+\frac{1}{2}$$ であるが，

$0\leqq\left|h\sin\frac{1}{h}\right|\leqq|h|\to 0\ (h\to 0)$ なので，

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(h\sin\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$ したがって $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

(2)

区間 $[a,b]$ で定義された連続関数 f が，区間 (a,b) で微分可能なら，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\qquad a<c<b$$

をみたす c が少なくともひとつ存在する．

(3)

等しい.

実際，無限小数 $0.a_1a_2a_3\dots$ (各 a_j は 0 から 9 までの整数) が数 α を表す，とは，

$$s_0=0,\quad s_1=0.a_1,\quad s_2=0.a_1a_2,\quad \dots,\qquad \text{すなわち}\qquad s_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{a_j}{10^j}$$

で定義される数列 $\{s_k\}$ が α に収束することである．無限小数 $0.999\dots$ は $a_j=9\ (j=1,2,\dots,)$ の場合であるから，

$$s_k=\sum_{j=1}^{k}\frac{9}{10^j}=1-\frac{1}{10^{k+1}}\to 1\qquad (k\to\infty)$$

なので，$0.999\dots$ は 1 に等しい．

問題 D の解答欄 配点：0 点

学籍番号			-						氏名	