微分積分学第二 B (1)

山田光太郎

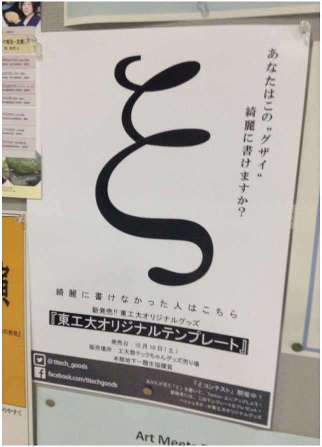
kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc2/

2015.12.11

お知らせ

- 前回配布した**予定表**に誤りがありましたので，改訂版を配布します．
- **予備試験**の答案を返却しております．
  受験者 57 名（受講登録者 99 名）; 満点 1 名 ; 問題 A/B 満点 : 8 名



予備試験問題 C (1)

問題： **次の関数の** $x = 0$ **における微分係数が存在するなら求めなさい**:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2}x & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

解答：

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(h \sin \frac{1}{h} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\cancel{\lim_{h \to 0} h \sin \frac{1}{h} = 1} \qquad \lim_{h \to +\infty} h \sin \frac{1}{h} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = \lim_{x \to 0} \left(\cos \frac{1}{x} + 2x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right)$$ **が存在しないので，**

~~**微分可能でない．**~~ **微分可能であるが，C^1-級でない．**

予備試験問題 C (3)

問題： 無限小数 $0.999\ldots$ と 1 は等しいか，理由をつけて答えなさい．

解答： 等しい．
無限小数 $0.a_1a_2a_3\ldots$ が数 α を表す，とは，

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{a_j}{10^j}$$

で定義される数列 $\{s_k\}$ が α に収束することである．
とくに $a_j = 9\ (j = 1, 2, \ldots,)$ の場合は

$$s_k = \sum_{j=1}^{k} \frac{9}{10^j} = 1 - \frac{1}{10^{k+1}} \to 1 \qquad (k \to \infty)$$

なので，$0.999\ldots$ は 1 に等しい．

予備試験問題 C (3)

問題： 無限小数 $0.999\ldots$ と 1 は等しいか，理由をつけて答えなさい．

解答（多少問題あり）： $\alpha = 0.99999\ldots$ とすると $10\alpha = 9.99999\ldots$ なので

$$9\alpha = 10\alpha - \alpha = 9.$$

したがって $\alpha = 1$．

すこしツッコミどころがあって，

- $10\alpha = 9.9999\ldots$ の部分で，極限の公式

$$\lim_{k\to\infty} ca_k = c \lim_{k\to\infty} a_k$$

  を用いている．
- $\alpha = 0.999\ldots$ とおいてよいか
  すなわち右辺に「意味があるか」についてナイーヴ．

予備試験問題 C (2)

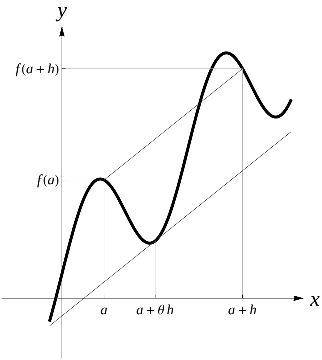
問題： 平均値の定理を述べなさい．

解答（定理 1.4）：

仮定 関数 f は $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能

結論 次を満たす c が存在する：

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \qquad a < c < b.$$



$$b = a + h,\ c = a + \theta h\ (0 < \theta < 1)$$

予備試験問題 C (2)

問題： 平均値の定理を述べなさい．

誤答：

- 次を満たす c が存在する：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b.$$

仮定がない

- f が (a,b) で微分可能なとき，次をみたす c が存在する．

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b.$$

仮定が足りない；反例: $f(x) = \begin{cases} x & (0 < x \leq 1) \\ 1 & (x = 0) \end{cases}$

予備試験問題 C (2)

問題： 平均値の定理を述べなさい．

正答（ただし弱い形）：

仮定 関数 f は $[a,b]$ で微分可能

結論 次を満たす c が存在する：

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \qquad a < c < b.$$

- 微分可能ならば連続（定理 1.1）
- 逆は成り立たないので，最初に挙げた仮定

$[a,b]$ で連続，(a,b) で微分可能

より強い仮定（定理としては弱い）

- 関数 $f(x) = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$ には，この形では適用できない．

予備試験問題 C (2)

問題： 平均値の定理を述べなさい．

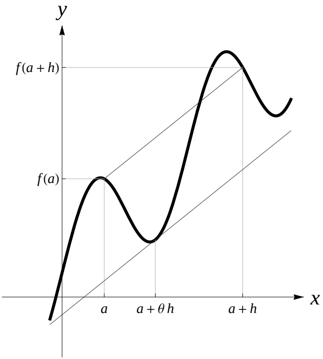
弱い形の variant **（系** 1.5**）：**

仮定 **関数** f **は** a **と** $a+h$ **を含む区間で微分可能．**

結論 **次を満たす** θ **が存在する：**

$$f(a+h) - f(a) = f'(a+\theta h) \times h, \qquad (0 < \theta < 1)$$

$h > 0$



$h < 0$