微分積分学第二 B (2)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc2/

2015.12.15

ご意見

ご意見： 採点がきびしいです．
コメント： 成績に関係ないので，むしろ厳しくしました．

ご意見： 裏面（略）．小学校のときに珠算塾でやったので，なぜ求まるのかよく分かりません．
コメント： 「開平法」（リンクは wikipedia）とよばれる平方根の計算のしかたですね．昔は中学校で教わっていました．

ご意見： くっそ丁寧な講義．誇らしくないの?
コメント： 意味がわかりません．

Q and A

Q: $0.9999\ldots$ って数なんですか? それとも極限なんですか?

A: 極限値って数じゃないんですか（もちろん発散してしまったら数じゃないですが）．極限か，数かというのは相反するものではない?
ただし第 V 節ですこし違ったことをいう予定．

Q: 高校では，無限小数 $0.999\ldots$ のことを $x = 0.999\ldots$ とおいて $10x = 0.999\ldots$ が成り立つと習ったのですが，この解き方は大学では正しくない，と先生は思われるということでしょうか．なんだか今までの知識が，表面から少しずつ崩れるような気分を今日の授業で感じてしまいました．
知識を少しずつ集めていくような勉強は，これからの僕の勉強の方法として，ふさわしいと思いますか?

A: 最後の文の意味がわかりませんが,「高校で本当にそう習った?」（教科書を参照せよ）

Q and A

Q: **テイラーの定理で** $f(x) = \sqrt{x}$ **は** $n = 1$ **としていますが** ∞ **回微分可能だおもうのですが，** f **の** $n+1$ **回微分可能のこの** n **はどのようにして値を決めているんですか．**

A: **無限回微分可能だから，何をとってもよい．必要な結論を導くために，どれくらいにするかをいろいろ考える．**

Q: **例** 1.20 **でテイラーの定理を適用したとき，右辺の** 3 **項目の出し方と** 3 **項しかでてこないことが分からないです．(適用のしかたが分からない)**

A: **テイラーの定理の** f, a, h, n **を具体的にして代入するだけです．「**$n = 1$ **として適用」の部分が読めてますか**?

テイラーの定理のコピーのしかた

Theorem (テイラーの定理)

関数 f が a を含む開区間 I で $(n+1)$ 回微分可能ならば，$a+h \in I$ となる h に対して

$$
\begin{aligned}
& f(a+h) \\
& \quad = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h) \\
& \quad = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h),
\end{aligned}
$$

$$
R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1
$$

をみたす θ が少なくともひとつ存在する．

Q and A

Q: **テイラーの定理を適用して小数第 m 位まで正しい $\sqrt{10}$ の近似値を求めるという問題があったとすると，この時のテイラーの定理の次数をどうすれば近似値が求めることができますか．**

A: **試行錯誤．**
あるいは剰余項を真面目に評価する（時間があったらやってみます）

Q and A

Q: **講義ノート** 4 **ページ，定理** 1.7 **の証明がなぜ「区間** I **で定義された微分可能な関数が** I **上で** $f''(x) = 0$ **（原文ママ：** $f'(x) = 0$ **の誤りか）みたしているならば** f **は** I **で定数である」ということの証明になっているかがよくわからない．**

A: **証明の最初の** 2 **行をよく読んで下さい．このことを示せば結論が得られるということはわかりますか**?

定理 1.7

Theorem

区間 I で定義された微分可能な関数が，I 上で $f'(x) = 0$ をみたしているならば，f は I で定数である．

Proof.

区間 I 上の点 a をとり固定する．この a と異なる任意の $x \in I$ に対して $f(x) = f(a)$ であることを示せばよい．
‘ いま $x > a$ のときは，区間 $[a, x]$ に平均値の定理を適用すると，

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c), \qquad a < c < x$$

をみたす c が存在することがわかる．ここで a，$x \in I$ だから $c \in I$ である．したがって仮定から $f'(c) = 0$ なので $f(x) = f(a)$ を得る．一方，$x < a$ のときは区間 $[x, a]$ に関して同様の議論をすればよい． □