

2015 年 12 月 15 日  
山田光太郎  
kotaro@math.titech.ac.jp

## 微分積分学第二 B 講義資料 2

### 前回までの訂正

- 12 月 11 日の講義で  $\sqrt{10}$  の近似値を平均値の定理を用いて求めた際、定義域を誤っていました。一部直しましたが、“ $3 < c < 4$ ” は “ $9 < c < 10$ ” の誤りです。
- 12 月 11 日の講義で紹介したテイラーの定理 ( $n = 1$ ) を用いた  $\sqrt{10}$  の近似値の計算例で書きなおしています。  $8 \times 25$  を  $400$  と書きました。学生さんの指摘で  $200$  と書きなおしています。
- 12 月 11 日の講義で紹介したテイラーの定理 ( $n = 2$ ) を用いた  $\sqrt{10}$  の近似値の計算例で  $3.161 < \sqrt{10} < 3.1637$  から、 $\sqrt{10}$  の小数第二位までは  $3.16$  で確定しますが、第 3 位を “1 or 2” としたそうです。“1, 2 or 3” が正解。
- 12 月 11 日の講義、二項定理の説明で、 $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = 2a_2 + 3 \times 2a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-1}$  と黒板に書いたようです。最後の項は  $a_nx^{n-2}$  の誤りです。
- 上の例で、 $a_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$  と書いたようです。正しくは  $a_k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$  です。
- 講義ノート I にて訂正した問題 I-10 のヒントで  $n+1$  を  $n$  に修正：  
(ヒント：次の事実を用いる。「多項式  $f(x)$  の次数が  $n$  以下であることがわかっているとき、 $f^{(k)}(0) = 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) が成り立つなら  $f(x)$  は恒等的に 0 である。」)
- 講義ノート I, 問題 I-11,  $\tan^{-1} x$  の場合： $n$  は一般の自然数を削除。
- 講義ノート I, 7 ページ, 脚注 21: 書きき下ろし  $\Rightarrow$  書き下ろし

### 授業に関する御意見

- 前が明るすぎて見にくい。 山田のコメント: Sorry.
- 久しぶりに先生の授業を受けて、字がつながっていて少し見づらいです。余白がないときゅうぎゅうにつまっているように見えるので少し見づらいです。 山田のコメント: Sorry.
- いやがらせテスト私は 25 点でしたが、ほめてください。 山田のコメント: えらいえらい
- 採点がきびしいです。 山田のコメント: 成績に関係ないので、むしろ厳しくしました。
- 高校で習った平均値の定理を思い出せた。 山田のコメント: よかった。
- 平均値の定理が思っていたより大事でした。 山田のコメント: そうなんですよ。
- 高校でやった内容も出て来るのかとわかったので、高校の勉強を復習しようと思う。 山田のコメント: 何を今更。
- 近似の精密なやり方にワクワクしました。 山田のコメント: そう?
- いろいろ定理が長いです。 山田のコメント: そうですね、で、どうしろと?
- 工太郎君はスピード違反をしましたが、光太郎君はどうですか? 山田のコメント: さあ、最近運転してないから。
- 裏面(いわゆる「開平法」と呼ばれる平方根の計算のしかたが書いてある)。小学校のときに珠算塾でやったので、なぜ求まるのかよく分かりません。 山田のコメント: ゆっくり考えるとよくわかるはずですよ。結構便利な計算法ですね(テイラーの定理を用いるより一般に収束が速いらしい)。昔は中学校で教わっていました。
- 数学がわからなすぎてやばいです。 山田のコメント: そうですね。
- 久しぶりの微積の授業だったので、つかれました。 山田のコメント: 私もです。
- 久しぶりの山田先生の授業、楽しかったです。 山田のコメント: どうも。
- 非常に興味深かったです。 山田のコメント: ですか。
- くっそ丁寧な講義。誇らしくないの? 山田のコメント: 意味がわかりません。
- 適当な感じがよかったです。 山田のコメント: 何が?
- 数字 1, 1, 9, 9 がある。これを「+」「-」「 $\times$ 」「 $\div$ 」でつないで 10 をつくれ。答  $(1 \div 9 + 1) \times 9 = 9.999 \dots = 10$  ( $\frac{10}{9} \times 9 = 10$ )。 山田のコメント: なるほど。昔、新しい年の 4 桁で 1 から  $n$  までをつくって年賀状をくれる中学校の数学の先生がいました。
- で? 山田のコメント: なんでしょ。
- とくになし。 山田のコメント: me, too.

## 質問と回答

質問： テイラーの定理においては  $a+h \in I$  であるならば（平均値の定理の系 1.5 の場合と同じように） $h < 0$  であっても問題はないのでしょうか。/ テイラーの定理は  $h$  が負の値であっても成り立ちますか。

お答え： もちろん問題ありません。とくに  $h > 0$  という仮定は書かれていませんよね。

質問： どうして系 1.5 では  $f$  が「 $a$  と  $a+h$  を含む区間で微分可能」とするのでしょうか？ 定理 1.4 のように「閉区間  $[a, b]$  で連続，開区間  $(a, b)$  で微分可能でない理由は？」

お答え： この系やテイラーの定理では  $h$  を動かしたい（次回扱います）。すると考える区間がどんどん縮んで行くので「端で微分可能でない」状況がおきなくなります。そういう使い方をするときには、このような仮定にしたほうが使いやすいということだと思って下さい。

質問： 平均値の定理の仮定を  $[a, b]$  で微分可能にしたらなぜだめですか。

お答え： たとえば系 1.5 などはそのような仮定をしていますが、たとえば  $f(x) = \sqrt{x}$  を区間  $[0, 1]$  で考えると、この区間で微分可能ではありませんが、平均値の定理の結論が成り立ちます。

質問： テイラーの定理で  $f(x) = \sqrt{x}$  は  $n=1$  としていますが  $\infty$  回微分可能だおもっているのですが、 $f$  の  $n+1$  回微分可能のこの  $n$  はどのようにして値を決めているんですか。

お答え： 無限回微分可能だから、何をとってもよい。必要な結論を導くために、どれくらいにするかをいろいろ考える。

質問： 例 1.20 でテイラーの定理を適用したとき、右辺の 3 項目の出し方と 3 項しかでてこないことが分らないです。（適用のしかたが分らない）

お答え： テイラーの定理の  $f, a, h, n$  を具体的に代入するだけです。「 $n=1$  として適用」の部分が読めてますか？

質問： テイラーの定理を適用して小数第  $m$  位まで正しい  $\sqrt{10}$  の近似値を求めるという問題があったとすると、この時のテイラーの定理の次数をどうすれば近似値が求めることができますか。

お答え： 文がおかしいですね。試行錯誤をしてみればよいのです。もし、一般の  $n$  に対して剰余項の表示が具体的にわかるならば、それが  $10^{-m}$  より小さくなるような  $n$  を求めればよいと思いますがいかがでしょう。

質問： Taylor の定理を物理学で用いたときは「 $x=0$  の近傍で」などの指定をしたのですが、この講義ではそのようなしてはしないのですか？

お答え： 今回扱ったテイラーの定理 1.19 は「 $h$  が小さい」という仮定をしていません。それは  $h$  が小さくなくても結論が成り立つからです。それを用いて近似計算をするには  $h$  が小さい方が有効ですが、それは定理の主張に含まれません。実際に適用するとき、剰余項  $R_{n+1}(h)$  が小さくなりやすいのは  $|h|$  が小さい時なのですが、それはこの定理に明示的に書かれていません。（ $|h|$  が小さいときに何がおきるかは「極限の問題」として定式化できます。次回説明します。）

質問： 物理の授業でテイラー展開を習った時は  $R_{n+1}(h)$  の項がありませんでしたが、それは物理においてはそこまで正確な値を求める必要はなく、 $R_{n+1}(h)$  の項が小さいから  $R_{n+1}(h)$  の項がなくても十分近似が成り立つという解釈でよろしいのでしょうか。

お答え： だいたい大丈夫です。ただ、物理の文脈でも、有限項で切ったものを「等式」で結ぶのはまずいですね。「近似的に等しい」という記号（人によって違う）でつなぐのがよいでしょう。さらに「 $h$  が十分小さい」という断りが必要ですね。

質問： 線形代数の時間にベクトルや行列を  $[\ ]$  でかこって書いている方が多かったのですが、これは二項係数  $\binom{n}{k}$  と区別するためですか？ それとも単純に好みですか？（教科書では  $( )$  を行列として用いているのもあったので）

お答え： 完全に好みだと思います。山田が見た所丸括弧の方が多く印象がありますが。

質問： P. 2 角をもつとは具体的にはどういうことですか。

お答え： 直感的な意味で使っていますが、グラフに「右側から引いた接線」と「左側から引いた接線」が一致しない、という意味のつもりです。

質問： 平均値の定理の「平均」とは何の平均を表しているのですか。

お答え： 定理 1.4 の左辺は関数  $f$  の区間  $[a, b]$  における平均変化率（という言葉は数学 II で習うはず）です。

質問： 必要以上の仮定をした定理を弱い形と言っていましたが、弱い形という言い方は先生独自のものですか。

お答え： いいえ。普通に使います。

質問： テイラー展開はテイラーの定理を書き直したものですか？ それとも別物ですか？

お答え： この講義では区別します。講義ノート II に書いておきます。

質問： テイラー展開の  $a = 0$  のときマクローリン展開， $n = 0$  のときに平均値の定理が出てきますが，ブルック・テイラーはその 2 つに気が付かなかったのでしょうか。

お答え： 大昔の話で，歴史的経緯を細かく考察するのは応用上重要ではないとは思いますが，マクローリンよりテイラーの方が後じゃないですか？

質問： 0.9999... って数なんですか？ それとも極限なんですか？

お答え： 極限值って数じゃないんですか（もちろん発散してしまったら数じゃないですが）. 極限か，数かというのは相反するものではないと思いますが。

質問： なぜ高校の教科書では  $\binom{n}{k}$  を使わないのでしょうか？

質問： 統計学の授業を前期にっていたのですが，そこでも二項係数が出てきました．高校ではどうして多数派の二項係数を教えないのですか？

お答え： 知りません．結構「縄張り」があるんですね．いずれにせよ，記号と言葉の問題だけですな．

質問： 高校のとき平均値の定理をならってもあまり使わない理由を教えてください．(大学からは証明によく使うらしいですが...)

お答え： 学習指導要領の決定プロセスをあまり良く知らないのですが，理論に偏り過ぎないことが要求されているように思います．平均値の定理は，微分学の重要な性質に絡んできていますが，それは「微分が 0 なら定数」とか「微分が正なら増加」など直感的には自明と思われる事項なので，まず入門段階では直感を重視するという解釈ができると思います．

質問： 高校数学の平均値の定理と大学のそれとの違いは何ですか？

お答え： 何も違っていません．そのようには見えませんか？

質問： 高校では，無限小数 0.999... のことを  $x = 0.999...$  とおいて  $10x = 0.999...$  が成り立つと習ったのですが，この解き方は大学では正しくない，と先生は思われるということでしょうか．なんだが（原文ママ）今までの知識が，表面から少しずつ崩れるような気分を今日の授業で感じてしまいました．知識を少しずつ集めていくような勉強は，これからの僕の勉強の方法として，ふさわしいと思いますか？

お答え： 最後の文の意味が（文脈と関連させても）わかりません．前半ですが「知識が崩れていく」ことを体験することは大事なことです．「正しい」というのは文脈依存で（高校では正しい，大学では正しくないという言い方が端的にあらわしています．この言い方は山田は嫌いですが）もちろん高等学校での説明（たぶん教科書にはもう少し違ったことが書いてあるはずだが）でも「正しい」といえば正しいのですが，その背景には「無限小数は必ず実数を表すこと」「積の極限の公式」があるんだということに気づいて欲しいので予備試験では不正解にしています．知識が増えると実は「あたりまえ」と思っていたことが当たり前でなくなるというのは当たり前でありまして，むしろそういう体験をたくさんしてください．

質問： 数を下から読むやり方（1234 を“ヨンサンジュウニヒャクセン”）は母がよく使っていました．

お答え： 剛毅なお母様ですね．

質問： 先生の授業中の発言「現実世界よりも数学の世界の方が 3000 倍くらい易しい」が少しひっかかります．現実世界の難しさと数学の世界の難しさを数値化しないかぎり，そのような表現はできないではありませんか？

お答え： おっしゃるとおりです．

質問： 「昇べきの順」「降べきの順」「 $n$  のべき乗」などに使われている「べき」という言葉はどういう意味の言葉なのでしょうか？

お答え： だれか「冪」という漢字を漢和辞典で調べてみて？

質問： 無限小数 0.999... が数として定義できるかわからないということに関して，テイラー展開も無限回できる場合もあると思うのですが，それは必ず定義されるのですか？

お答え： 定義される，という語をどういう意味で使っているのかわかりませんが，次回の後半にそれに関する話題を扱います．

質問： Taylor の定理のように多変数の関数に対しても近似する方法はあるのでしょうか？

お答え： 多変数のテイラーの定理を年明けに扱います．

質問： テイラーの定理の  $R_{n+1}(h)$  が平均値とっていたのはどういう意味ですか？

お答え： そうは言っていません．

質問： 二項定理で全部の項を足すと  $2^n$  ってどうやって出すのか聞き逃しました．テイラーの定理は平均値の定理を使うから一般化とっていいですか？

お答え： 2 つの質問？ 前半：二項定理  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$  に  $x = 1$  を代入．後半：そういいませんでした？

質問： テイラーの定理を証明することには平均値の定理を用いるということですか？

お答え： そう言いましたよね。講義ノート 7 ページでは、特別な場合（ロルの定理）を用いています。

質問： 講義ノート 4 ページ，定理 1.7 の証明がなぜ「区間  $I$  で定義された微分可能な関数が  $I$  上で  $f''(x) = 0$ （原文ママ：  $f'(x) = 0$  の誤りか）みたしているならば  $f$  は  $I$  で定数である」ということの証明になっているかがよくわからない。

お答え： 証明の最初の 2 行をよく読んで下さい。このことを示せば結論が得られるということはわかりますか？

質問： テイラーの定理の式を  $n$  回積分して  $f(a)$  をその積分の和で表すことはできますか。

お答え： 文脈がわかりませんが，講義ノートのテイラーの定理では  $f(a)$  は既知としていませんか？

質問： 先生が美しいと感じる  $\pi$  に関する不等式があれば何ですか？

お答え： べつに美しいとは感じません。

質問： 導関数が連続でなく，その関数そのものは連続という関数は存在しますか。

お答え： 例 1.3。微分可能ならば連続ですから，「導関数が...」と言った時点でもとの関数は連続に決まっています。

質問： 積分の平均値の定理も一般化することができますか？

お答え： たいいていの定理は一般化ができるのではないかと思います。それがあなたが望んだ形かどうかは別ですが，というわけで「どういう方向の一般化か」を特定してください。

質問： テイラー展開以外の近似ってありますか？

お答え： さまざまな方法があります。たいいていのことには 2 つ以上の方法があると思うのですが。

質問： テイラーの定理は近似以外で何が役立つんですか？

お答え： 次回，極限の問題に応用します。その他，たとえば自然対数の底が無理数であることもテイラーの定理を用いると証明できます（本日配布する講義ノート II の問題にあげています）。

質問： つまり Taylor の定理は近似を行うときに必ず考慮すべきですか？

お答え： 「つまり」というのは何を言い換えたのでしょうか。前の文脈が分からないのでお答えのしようがありません。「必ず考慮すべき」ということの意味も分かりません。

質問： 評価の計算は，グラフなどの視界的にも何かできる気がするのですが，そのへんについて何かありませんか？

お答え： ご質問の意味がわかりません。

質問： 値をできるだけギリギリまで抑えるコツを教えてください。

お答え： 文脈は？ 何の値？ 抑えるという意味は？ ギリギリとは何に対して？

質問：  $C_\infty$  級（原文ママ：  $C^\infty$  級のことか？）の説明のところで  $n+1$  回微分できると表現したのはなぜですか？

お答え： もう少し文脈を特定していただけませんか？