# 微分積分学第二 B (4)


**山田光太郎**

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc2/


2015.12.22

# おしらせ

- 2015 年の講義は今回で終了です．良いお年をお迎えください．

- 2016 年最初は 1 月 5 日（火）＋ 1 月 8 日（金）の変則ペアの講義になります．

## 注意！

# 講議 × ~~講議~~　　○ 講義

## ご意見

**ご意見：** 僕が通っていた塾の先生が「有理数，無理数って言うよりも有比数，無比数と言った方が分かりやすいよね.」と言っていたのを思い出しました．

**コメント：** やった．同志がいた．

**ご意見：** テイラー展開が文系科目の小テストでも出てきていろんなところに使われているんだなと思った．

**コメント：** 常識ですからね．

**ご意見：** 今日の内容はテイラー展開の演習みたいで，ちゃんとテイラー展開を覚えないといけないので，冬休みにちゃんとやってくる予定です．

**コメント：** まあ，常識なんでね．

**ご意見：** $\tan x$ を教えて下さい．

**コメント：** 知らないの?

# 質問

Q: テイラーを教えていら〜

A: いや

Q: 分かりやすかったので質問はありません.

A: それじゃつまんない.

Q: ${}_n\mathrm{C}_\alpha$ を $\binom{\alpha}{n}$ （原文ママ：$\binom{n}{\alpha}$ の誤りか?）と書く利点はあるのでしょうか?

A: $\binom{n}{\alpha}$ を使う人がが多数派.
したがって「より多くの人と理解しあえる」.

# 言い切れていない質問

Q: **無理数と無理数から有理数は作れますよね? 有理数と有理数から無理数はつくれるんですか? 有理数と無理数から有理数はつくれますか?**

A: **「作る」という言葉があまりにもナイーヴすぎ．たとえば有理数 $2$ と有理数 $\frac{1}{2}$ から無理数 $2^{\frac{1}{2}}$ が作れますが，これは望んだ答え? 有理数 $2$ と無理数 $\sqrt{2}$ から $\sqrt{2}^2$ という有理数がえられますが，これは望んだ答え?**

Q: **テイラーの定理の近似以外の以外の使い道について $\theta$ の値が求まることがあるか？**

A: **「求まる」ということで何を求めているかによる．今回つかった式 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^{\theta}$ から $\theta = \log(6e - 15)$ と求まるわけですが，これは求まったと思ってよい？**

# 言い切れていない質問

Q: **微分により変化しない** or **サイクルののちに元に戻るなどのとき** $f(x)$ **は決めやすいですよね．これはそうでないときはどこをみてやっていきますか？**

A: **意味がわかりません．関数** $f$ **は微分する前から決まりませんか**?

Q: $\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-ax-bx^2}{\sin x(1-\cos x)}$ **が存在するというのは，テイラーの公式で** $\sin x(1-\cos x)$ **と** $\log(1+x)$ **を** $f(x)$, $g(x)$ **で表し，** $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-ax-bx^2}{f(x)}$ **と表していいのは何故ですか**?

A: **テイラーの公式を使っても使わなくても** $\sin x(1-\cos x) = f(x)$, $\log(1+x) = g(x)$ **なら，ただの代入だと思いますが，代入は理解していますか**? **あるいは「表す」に山田が関知しない秘密の意味を隠していますか**?

# 場合による

Q: 「小数第〜桁までもとめなさい」という問いに対して，テイラーの定理で $n$ をいくつにさだめればいいかわからない．一応，自分は $m$ 桁までもとめるときは $n = m + 1$ と定めているがそれで十分かどうかがわかりません．

A: 十分かどうかは個別の問題．

Q: どれくらいの大きさの数が $0$ に近い数なのですか．

A: 相対的なもの．考えたい問題による．

Q: 演習の授業のときに Taylor の定理（略）で，$h$ が $4$ くらいでも良い近似が得られると菅先生がおっしゃっていたのですが，どれくらいの大きさまでならよい近似が得られると山田先生は考えていらっしゃいますか．

A: 文脈不明．具体的な関数，どの程度の近似が「良い近似」かによって答えは違ってきます．「山田がどう考えるか」という属人的な質問はナンセンス．

# 質問

Q: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots,$
$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots,$
$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$
**として** $e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$
$\cos x + i\sin x = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$
**なので** $e^{ix} = \cos x + i\sin x$**．** $x = \pi$ **のとき** $e^{i\pi} = -1$**．**
$\therefore e^{i\pi} + 1 = 0$ **というようにテイラー展開からオイラーの等式を導き出せると聞いたことがありますが，これは証明になるのですか．**

A: **すこし背景を補足する必要がありますが，証明と見なせるようにすることができます．**
**本日，時間があれば補足します．**

# テイラーの定理は近似定理か

Q: **テイラーの定理の $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$ (原文ママ) の $h$ は $h$ が $0$ に十分近いときになりたつ定理なのになぜ $\cos x$, $\sin x$ に適応すると $h = x$ で $-\infty < x < \infty$ とできるのですか**?

# テイラーの定理 ($h$ はなんでもよい)

Theorem

**関数 $f$ が $a$ を含む開区間 $I$ で $(n+1)$ 回微分可能ならば，$a+h \in I$ となる $h$ に対して**

$$\begin{aligned} & f(a+h) \\ & \quad = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h) \\ & \quad = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} f^{(j)}(a)h^j + R_{n+1}(h), \end{aligned}$$

$$R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h), \quad 0 < \theta < 1 \tag{1}$$

**をみたす $\theta$ が少なくともひとつ存在する**

# テイラーの定理 ($h$ の極限挙動)

**Theorem**

**関数 $f(x)$ は $a$ を含む開区間で $C^{n+1}$-級とする．このとき，次が成り立つ：**

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n + R_{n+1}(h)$$

**とおくと** $$\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0. \quad (2)$$

# 質問

Q: **テイラー級数において**
$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ **の式の定義域が** $-\infty < x < \infty$ **であるが，** $\lim_{x\to\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ **は正しいのか．**

A: **両辺とも** $+\infty$ **で正しいです．**
**応用：任意の** $n$ **に対して**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

# 質問

Q: 極限値の問題で，テイラーの定理を用いる際の $n$ の値はどうやったらぱっとわかりますか?

A: 試行錯誤してごらんなさい．すると仕組みがわかってきます．最初から近道を聞こうと思わないで．

Q: $\frac{\log(1+x)-ax-bx^2}{\sin x(1-\cos x)}$ の極限値に関する問題の板書で，$\sin x$, $1-\cos x$, $\log(1+x)$ にテイラーの定理を用いたときに，それぞれ $n=1, 2, 3$ とした理由の説明を聞き逃していたので解説をお願いします．

A: 説明していません．いろいろな $n$ を試して最適なものを見つけるという試行錯誤を練習問題でやってみて下さい．すると下手な説明を聞くより仕組がよく分かります．最初から近道を聞こうと思わないで．