2015 年 12 月 22 日 (2015 年 12 月 22 日訂正)
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 4

お知らせ

- 2015 年の講義は今回で終了です．良いお年をお迎えください．2016 年最初は 1 月 5 日（火）＋ 1 月 8 日（金）の変則ペアの講義になります．

前回の補足

- 提出物に「講義」を「講議」と書かれたものが複数ありました．前期にも何回も指摘しましたね．前期にも山田のクラスに出ていた方でしたので，減点をしています．

前回までの訂正

- 黒板に examples と書いたにもかかわらず例が 1 つしかなかったそうです．
- e が無理数であることを説明した際の板書の誤り：

$$e = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta} \quad \Rightarrow \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$$

- 逆正接関数のテイラー展開の板書（総和記号を用いたものは正しいはず）

$$\tan^{-1} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots \quad \Rightarrow \quad \tan^{-1} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \dots$$

- 講義ノート 11 ページ，問題 I-2：100Km ⇒ 100km．SI 接頭語はメガ (M) より先は大文字なのにキロ (k) は小文字なんですね．きっとケルビン (K) と干渉するからですね．
- 講義ノート 14 ページ，下から 3 行目：き，⇒ と書き，
- 講義ノート 24 ページ，問題 II-5 (4)：テイラーの定理?? ⇒ テイラーの定理 1.19 （注：TEX の参照エラー）

授業に関する御意見

- 先生は，もしや童貞ですか?! **山田のコメント：** それは個人情報ですね．
- 僕が通っていた塾の先生が「有理数，無理数って言うよりも有比数，無比数と言った方が分かりやすいよね.」と言っていたのを思い出しました． **山田のコメント：** やった．同志がいた．
- テイラー展開が文系科目の小テストでも出てきていろんなところに使われているんだなと思った． **山田のコメント：** 常識ですからね．
- 今日の内容はテイラー展開の演習みたいで，ちゃんとテイラー展開を覚えないといけないので，冬休みにちゃんとやってくる予定です． **山田のコメント：** まあ，常識なんでね．
- Taylor の定理を使った関数の収束の判定の問題はとてもおもしろかった! 私はこの問題の類題をときながら新年を迎えることでしょう．
  山田のコメント： そう. . . 類題を作ってみるといいですよ．
- $e = 2.718281828459045235360287471352\dots$ π と比べて知名度が低いですね． **山田のコメント：** そうですね．だれかいい名前をつけて下さい．
- ありがとうございます． **山田のコメント：** どういたしまして．
- $\tan x$ を教えて下さい． **山田のコメント：** 知らないの?
- 「テイラー」を筆記体で書けません． **山田のコメント：** そうですか．
- 髪の毛は，どこで切っていますか? **山田のコメント：** ハサミの先端でも根元でもなく真ん中辺．
- 逆ホ先生の話をもっとききたいです． **山田のコメント：** あれだけ．
- あったかくて眠かったです． **山田のコメント：** 寒い方がいい?
- ヤバイね! **山田のコメント：** そうだね．

質問と回答

質問： テイラーの定理ってなんだよ (怒) と思ったが，n を小さくしてかんたんに考えるとりかいできた! はやく，テイラー展開を先生のこうぎで勉強したい!! **お答え：**いまやってますけど．もう少しでおわりますけど．

質問： $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \dots$, $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \dots$, $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \dots$ として $e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ $\cos x + i \sin x = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots$ なので $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. $x = \pi$ のとき $e^{i\pi} = -1$. $\therefore e^{i\pi} + 1 = 0$ というようにテイラー展開からオイラーの等式を導き出せると聞いたことがありますが，これは証明になるのですか.

お答え： 適切な補足をつければ証明になります：まず，複素数 z に対して

$$1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{1}$$

を考えると

定理 1. 任意の複素数 z に対して，(1) はすべて絶対収束する（絶対収束の意味は第 V 回）.

そこで $E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ とおくと E は複素数 z を変数とする，複素数に値をもつ関数である．とくに講義ノート 17 ページの (2.8) より，実数 x に対しては $E(x) = e^x$. したがって，$E(z)$ は実数に対する指数関数の拡張とみなされるので，これも $e^z := E(z)$ と表すと，実数 x に対して e^{ix} は意味をもち，

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - i\frac{1}{3!}x^3 + \dots \tag{2}$$

と求められる．ここで，一般論として，<u>絶対収束する</u> 無限級数 2 つの和 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$ の<u>和の順序は任意に入れ変えられる</u>ことに注意すると，(2) から $\cos x + i \sin x = e^{ix}$ が得られる.

質問： 極限値の問題で，テイラーの定理を用いる際の n の値はどうやったらぱっとわかりますか?

お答え： 試行錯誤してごらんなさい．すると仕組みがわかってきます．最初から近道を聞こうと思わないで.

質問： $\frac{\log(1+x)-ax-bx^2}{\sin x(1-\cos x)}$ の極限値に関する問題の板書で，$\sin x$, $1 - \cos x$, $\log(1 + x)$ にテイラーの定理を用いたときに，それぞれ $n = 1, 2, 3$ とした理由の説明を聞き逃していたので解説をお願いします.

お答え： 説明していません．いろいろな n を試して最適なものを見つけるという試行錯誤を練習問題でやってみて下さい．すると下手な説明を聞くより仕組がよく分かります．最初から近道を聞こうと思わないで.

質問： どれくらいの大きさの数が 0 に近い数なのですか. **お答え：**相対的なもの．考えたい問題による.

質問： 演習の授業のときに Taylor の定理（略）で，h が 4 くらいでも良い近似が得られると菅先生がおっしゃっていたのですが，どれくらいの大きさまでならよい近似が得られると山田先生は考えていらっしゃいますか.

お答え： 菅先生の発言の前後の文脈を教えていただかないと，この話の筋が見えません（まさか，文脈を聴き逃してはいませんよね！）．そのうえで，具体的な関数，どの程度の近似が「良い近似」かによって答えは違ってきます．「山田がどう考えるか」という属人的な質問はナンセンスと思います.

質問： 友人から聞いた話しなのですが，人の顔を C^1-級だと言った場合，それはのっぺり顔だという意味になるそうです．ということは，C^1-級の関数のグラフは平面的だという解釈になるのでしょうか?

お答え： 文脈不明．一変数関数のグラフはすべて平面に含まれているので「平面的」では? その「ご友人」がどういう文脈で語ったのかが不明なので「ということは」以降がナンセンスになっています．ちなみに C^1-級関数でもかなり挙動が激しいものがありますので，ご友人の言葉は（もしご友人のオリジナルとしたら）大きな勘違いを含んでいます．オリジナルがあるとしたら知りたいですね.

質問： $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{\sin x(1 - \cos x)}$ を求める問題は高校範囲で解けるのか（大学受験で出題できるのか）が気になった．あと 2 ヶ月と少しですね.

お答え： あなたが気にしなくてもよい（気にする理由はない）とは思いますが，適切な誘導をすれば出題はできますね．「関数の増減と不等式」がキーとなります.

質問： C^0-級関数は適当な閉区間で最大値 M をもつから f が C^{n+1}-級なら $|f^{(n+1)}(a + \theta h)| \leqq M$ より $\lim_{h \to 0} \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0$ とありました．確かに $\lim_{n \to 0} R_{n+1}(h) =$ (略)$= 0$ は理解できますが，分母に h^n をおいて $\lim_{h \to 0} \frac{R_{n+1}(h)}{h^n} = 0$ としたのは何故でしょう．式の成立には疑いありません.

お答え： この話題に入るまえに $f(x)$ が $g(x)$ より「はやく 0 に近づく」ということの（この講義での）意味を説明しました．講義ノートではランダウの記号 o です（講義では述べていませんが）．その意味で $R_{n+1}(h)$ が 0 に近づく，だけではなく h^n よりもはやく 0 に近づくということがいいたかったわけです（と口頭で説明したはずです）.

質問： $\frac{1}{n+1}e^{\theta}$: 整数，一方 $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n+1}e^{\theta} < \frac{3}{n+1}$ $(0 < \theta < 1)$, $n \geqq 4$ のとき矛盾とありましたが，$n \geqq 4$ なら何故矛盾なのでしょうか.

お答え： $n \geqq 4$ なら区間 $(\frac{1}{n+1}, \frac{3}{n+1})$ は整数を含まない.

質問： 背理法を用いないで e が無理数であることを証明することはできますか．

お答え： できないと明言はできません．何が示されれば「無理数」であるといえるかを考えてみて下さい．

質問： 無理数のように「〜でない」という定義のものは数学では多いですか． **お答え：**多いです．探してみて下さい．

質問： 無理数と無理数から有理数は作れますよね？ 有理数と有理数から無理数はつくれるんですか？ 有理数と無理数から有理数はつくれますか？

お答え： 「作る」という言葉があまりにもナイーヴすぎ．たとえば有理数 2 と有理数 $\frac{1}{2}$ から無理数 $2^{\frac{1}{2}}$ が作れますが，これは望んだ答え？ 有理数 2 と無理数 $\sqrt{2}$ から $\sqrt{2}^2$ という有理数がえられますが，これは望んだ答え？

質問： テイラー級数において $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ の式の定義域が $-\infty < x < \infty$ であるが，$\lim_{x\to\infty} e^x = \lim_{x\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ は正しいのか． **お答え：**両辺とも $+\infty$ で正しいです．

質問： $\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$ は $x \to \infty$ でも成り立つのですか．

お答え： 左辺を $x \to \infty$ とした極限値は存在しません（あたりまえ）．右辺も極限値は存在しません．

質問： テイラー級数が存在するかしないかのわかりやすい違いはありますか？

お答え： $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n$ が $f(a+h)$ と一致するかどうか．これがわかりやすい違い（定義そのもの）．ひょっとして判定条件のことを聞いています？ そうだとしたら質問の文章が違います．

質問： テイラー級数に展開できないものに条件や定理等はありますか？

お答え： 簡単な判定条件というものはないと思います．初等関数は（普通の状況では）実解析的で，この授業で通常に扱う例はテイラー級数に展開できると考えて良いです．

質問： テイラー級数が定義域全体をカバーするとは限らない例を，プリントや板書に書いていたもの以外に，もう少し教えていただきたいです．

お答え： たいていの場合は定義域全体をカバーしないのですが，初等的な例はここの例のバリエーションと思います．

質問： 火曜日の誤差を評価する話の中で，$|\binom{\frac{1}{2}}{k+1}| < |\binom{\frac{1}{2}}{k}|$ であるから k について単調減少であると述べていたが，関数でないものに対して単調減少（増加）という言葉は用いて良いのか．高校時代に予備校ではこのようなものは増加（減少）数列と呼ぶべきと言われたのだが．

お答え： 「増加数列」ということも「単調増加数列」ということもあります．予備校で言われたことの背後にあるロジックを理解していないのでなんとも言えませんが，関数と数列で言葉を区別する理由はありません．「増加関数」という言い方も普通です．ここで「単調減少」という言葉を使ったのは，後（第 IV 節くらい）で，「増加または減少数列」を「単調数列」と呼びたいからです．

質問： 今回の講議（原文ママ：講義のことと思われます）資料の P. 15 の例 2.5 で. . . (中略；「同値」と「必要十分条件」について）どちらも「⇔」で表せるのになぜ「同値」と「必要十分条件」と言葉を使い分けるのですか？

お答え： もちろん，同じ意味．したがって，まったく同じ意味で使っています．使い分けに明確な基準があるわけではありませんが「A と B は同値である (1)」「A は B であるための必要十分条件である (2) 」の 2 つの文を比べると (2) の方が A に相当するフレーズが長くなるのではないかと思います．

質問： $\min\{a, b\}$ という記号はありますか． **お答え：**あります．

質問： 先生の書く Taylor の筆記体が Tayler に見えます．もう少しきれいに書いてほしいです!

お答え： Sorry. 文脈で理解せよ，じゃだめ？

質問： 授業最後の $\sqrt[3]{30}$ の例を筆記したかったんですけど，すぐに消してしまったのはなぜですか. . . もしよければここに書いていただけませんか？ **お答え：**無理に覚えていただかなくてもよい余談，というつもりだったので．

$$\sqrt[3]{30} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{1/3} = 3\left(1 + \binom{\frac{1}{3}}{1}\frac{1}{9} + \ldots\right) \fallingdotseq 3\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}\right) = 3 + \frac{1}{9}.$$

質問： 板書 “$\frac{m}{n} = e = \frac{1}{+}\frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!}e^{\theta}$” の両辺の n は同じものですか？

お答え： はい．右辺に 1 が抜けています（訂正の項参照）が．

質問： テイラー級数はテイラー展開（原文ママ：テイラーの定理のことか？）の剰余項をなくして表したもの（原文ママ：主要部を $n \to \infty$ としたもの）で，それは C^{∞}-級関数全てにおいて表されるわけではない，という解釈で良いですか？

お答え： よいですが，「解釈」という曖昧な語に逃げずに，きちんと主張を述べてください．

質問： 講義ノート 18 ページに「テイラーの定理は $f(a+h)$ を h の有限次の多項式で近似したときの誤差を表理（原文ママ：表現のことか）する定理である」とありますが，その誤差とは剰余項のことでよいのでしょうか．

お答え： よいです．

質問： $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-ax-bx^2}{\sin x(1-\cos x)}$ が存在するというのは，テイラーの公式で $\sin x(1-\cos x)$ と $\log(1+x)$ を $f(x)$, $g(x)$ で表し，$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-ax-bx^2}{f(x)}$ と表していいのは何故ですか?

お答え： テイラーの公式を使っても使わなくても $\sin x(1-\cos x)=f(x)$, $\log(1+x)=g(x)$ なら，ただの代入だと思いますが，代入は理解していますか? あるいは「表す」に山田が関知しない秘密の意味を隠していますか?

質問： 授業であつかった $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-ax-bx^2}{\sin x(1-\cos x)}$ を $\frac{\log(1+x)-ax-bx^2}{x^3}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}$ とおいて $\log(1+x)=x-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+R_4(x)$ とおいて（原文ママ：3 次の項の係数は誤り）$x\to 0$ のとき $a\neq 1, b\neq\frac{1}{2}$ （原文ママ：正しくは $a\neq 1$ または $b\neq -\frac{1}{2}$）のとき発散するので，$a=1$ かつ $b=\frac{1}{2}$ であるとして問題ないですか．（$\frac{\sin x}{x}$ と $\frac{x^2}{1-\cos x}$ は 0 以外の定数として収束するので） **お答え：**文中に指摘した誤りを除いて問題ないです．

質問： 「閉区間 $[a,b]$ で定義された一変数連続関数が開区間 (a,b) で微分可能であるとする．このとき $\frac{f'(b)-f'(a)}{b-a}=f''(c)$ $a<c<b$ をみたす c が少なくともひとつ存在する」は正しいですか，それともやはり誤りですか．

お答え： 微分可能という仮定のみでは $f''(c)$ が意味をもたない可能性があるので誤り．仮定が f が $[a,b]$ で微分可能（でないと左辺が意味をもたない），f' が $[a,b]$ で連続，f が (a,b) で 2 回微分可能，なら正しい（当たり前）．

質問： 微分により変化しない or サイクルののちに元に戻るなどのとき $f(x)$ は決めやすいですよね．これはそうでないときはどこをみてやっていきますか？ **お答え：**意味がわかりません．関数 f は微分する前から決まりませんか?

質問： 「小数第〜桁までもとめなさい」という問いに対して，テイラーの定理で n をいくつにさだめればいいかわからない．一応，自分は m 桁までもとめるときは $n=m+1$ と定めているがそれで十分かどうかがわかりません．

お答え： 十分かどうかは個別の問題．具体的に n をとれば，十分かどうかを判定することができますね．実際，$\sqrt{10}$ が何桁まで求まるか，というのはやってみせました．求める精度で十分でなければ n を増やせばいいのです．おおよその見当の付け方は 12 月 15 日に例示しましたね．

質問： テイラーの定理の $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h)$ (原文ママ）の h は h が 0 に十分近いときになりたつ定理なのになぜ $\cos x, \sin x$ に適応すると $h=x$ で $-\infty<x<\infty$ とできるのですか?

お答え： テイラーの定理（講義ノートの定理 1.19）のステートメントを熟読せよ．どこに「h が十分小さい」とかいてあるでしょうか．講義では「h は何でもよい．h が小さいと，剰余項は他の項くらべて十分小さいので，それをおとして近似式ができる」という話をしました．あくまでも定理の本体は「小さい h」に対してではない，近似などに使うときに h が小さいことが期待される．数回述べましたね．

質問： テイラーの定理の近似以外の以外の使い道について θ の値が求まることがあるか？

お答え： 「求まる」ということで何を求めているかによる．今回つかった式 $e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{\theta}$ から $\theta=\log(6e-15)$ と求まるわけですが，これは求まったと思ってよい？

質問： e が明らかに循環少数（原文ママ：小数のことか）でないことの証明が知りたいです．

お答え： それを今回やったんですけど．有理数であることと循環小数で表されることが同値であることはいいですね．

質問： テイラー展開とテイラーの公式の違いを教えて下さい．

お答え： 文脈による．この講義での「テイラー展開」と「テイラーの定理」の使い分けは，講義ノート 18 ページ脚注 8.

質問： ${}_n\mathrm{C}_\alpha$ を $\binom{\alpha}{n}$ （原文ママ：$\binom{n}{\alpha}$ の誤りか?）と書く利点はあるのでしょうか?

お答え： $\binom{n}{\alpha}$ を使う人がが多数派．したがって「より多くの人と理解しあえる」.

質問： $nC\alpha$ ってなんでしたっけ． **お答え：**こんな記号は見たことがありません．文字の大きさが変なのでは?

質問： 今のところテイラーの定理は近似しか利用されていませんが，他にどんなところで用いることができるのですか?

お答え： ということを今回やったんですけど，聞いてなかったんですか（寂しい).

質問： $R_{n+1}(h)=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$ このリマインダーはどうしてこのような式だとよい近似値に近づけることができるのか．$a+\theta h$ の部分がナゾ．でもこういう式だと言われたら，いい近似値をだせそうと思いました．

お答え： そうですか．$h=0$ の十分近くで $|f^{(n+1)}(a+\theta h)|<M$ をみたす M が存在するという説明をしましたよね．

質問： 背理法以外の証明方法がある命題を証明するときに，背理法が一番楽な証明方法となることはあるのですか．「楽である」ということがどういう事なのかがうまく言葉にできず曖昧なままになってしまいすいません．

お答え： 楽かどうかは人や問題にもよりますね．素数が無限個あるという事実のユークリッドの証明は楽に見えますか?

質問： 分かりやすかったので質問はありません． **お答え：**それじゃつまんない．

質問： テイラーを教えていら〜 **お答え：**いや