微分積分学第二 B (6)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc2/

2016.01.08

お知らせ

- 次回は 1 月 14 日（木）です．

ご意見： 火曜日なのに提出用紙があって意外でした．

コメント： 今週はイレギュラーなくみあわせだということを，年末の授業で言ったはず．
講義資料 4 にも書いてありますよね．
ひょっとして聞いていなかった? 欠席した?
欠席してもよいが，授業時間に伝えたことは伝わっていると見なす，と講義概要に書いてありますよね．

お知らせ

- 1 月 22 日（金）は「ジェネリック・スキル」測定試験「PROG」を受験していただきます．教育改革に伴う学生のジェネリック・スキルの現況調査が目的です．ご協力ください．通常の時間に通常の教室までおいでください．
  詳細は http://www2.gakumu.titech.ac.jp/kyoumu/kaikaku/doc/2015prog.pdf
- 1 月 26 日（火）に中間試験を行います．14 日に予告しますので，お誘い合わせの上おいでください．

授業日程

講義—質問から

Q: 講議ノート（原文ママ） p 32 の補題 3.13 で，$A \neq 0$ かつ $C \neq 0$ のときはどう証明されるのですか?

A: 授業に出てきているなら
（授業の内容をフォローしているなら）
こんな字は書かないはずなんですがね．
(2015 年 12 月 22 日の提示資料から)

ご意見

ご意見： あけましておめでとうございます．
今年もよろしくおねがいします．
テストは簡単にして下さいお願いします．

コメント： おめでとうございます．
こちらこそ．
なんで?

ご意見： むずいです．

コメント： よかった．大学まできて簡単なことばかりをやるんじゃつまんないよね．

質問から

Q: **ヘッセ行列の意味がわかりません.. なんで “微積で” 行列が出現しているんですか.**

A: **意味がわからなくても，定義は分かりますね.**
で，出現しちゃいけませんか?
なんで科目ごとに仕切りをつけないといけないの?

Q: **先生は，叱られる** $\Rightarrow$ **勉強する の関係はどんなでしたか**? (1) **叱られなくても勉強する** (2) **叱られたら勉強する** (3) **叱られても勉強しない.**

A: (4) **叱られたら勉強しない，っていう選択肢はないの**?

質問から

Q: **対偶は元と常に等価ですか．**

A: **はい（古典論理では）．**

Q: **命題とその対偶が同値であることを証明することはできるのですか．**

A: **「真偽が一致」することが示せる：**

P	Q	$P \Rightarrow Q$	not Q	not P	not $Q \Rightarrow$ not P
真	真	真	偽	偽	真
真	偽	偽	真	偽	偽
偽	真	真	偽	真	真
偽	偽	真	真	真	真

注：「$P \Rightarrow Q$」は「(not P) or Q」のこと

定理 3.5

Theorem (定理 3.5)

関数 f は $x = a$ を含む開区間で C^∞-級とする．

- A: **$f(x)$ が $x = a$ で極値（極大値または極小値）をとるならば，$f'(a) = 0$ である．**
- B: **$f'(a) \neq 0$ ならば，$f(x)$ は $x = a$ で極大値も極小値もとらない．**
- C: **$f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ が成り立つならば $f(x)$ は $x = a$ で極小値をとる．**

質問から

Q: **定理** 3.5 **において，** A, C **の逆が成立しないことは反例を示せばよいことになった．だが** B **について，逆が成立することはどのように示せばよいのですか．**

A: B **の逆は成立しません．**

Q: **定理** 3.5 **の** B **や** C **が成り立つ理由の正確バージョンはいつやるのですか**?

A: B **は** A **の対偶だから，**A **の理由（ちょっと正確バージョン）がそのまま理由になっています．**C **については** 1 **月** 5 **日にやりました．**

質問から

Q: **定理** 3.5 **の** B **や** C **が成り立つ理由のいい加減バージョンでも証明として使えるのですか**?

A: **いいえ．ただし，この定理が成り立つ「おおまかな理由」（皆さんがすきな言葉でいうとイメージ）を表しています．**

Q: Taylor **の定理の** $n = 1$ **で，**
$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + R_2(h)$, $\lim_{h\to 0} \dfrac{R_2(h)}{h} = 0$ **が成り立ちますが，** m **(原文ママ：** $f'(a)$ **のことか)** $\neq 0$ **のとき，** $R_2(h)$ **の項は無視して近似していましたが，近似から** (B) $f'(a) \neq 0 \Rightarrow f$ **は** a **で極値をとらない，の理由が示されたという所が納得できないのですが．**

A: **だから「いい加減バージョン」．**

2 変数関数の極値判定 (1)

Theorem (定理 3.11)

$\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b) \in D$ で極値をとるならば

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

が成り立つ．

Corollary (上の対偶)

$\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が，点 $(a,b) \in D$ において

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right) \neq (0,0)$$

をみたすならば，f は (a,b) で極値をとらない．

2 変数関数の極値判定 (2)

Theorem (定理 3.12)

$\mathbb{R}^2$ の領域 D で定義された C^∞-級関数 f が $(a,b) \in D$ において

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0 \qquad \text{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$$

をみたしているとする．このとき，

$$\Delta := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)\right)^2 \qquad A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

とおくと，

- $\Delta > 0$ かつ $A > 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極小値をとる．
- $\Delta > 0$ かつ $A < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極大値をとる．
- $\Delta < 0$ ならば $f(x,y)$ は $(x,y) = (a,b)$ で極値をとらない．

2 変数関数の極値判定 (3)

定理 3.12 **の（いい加減な）理由：（テイラーの定理** 3.8**）**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0 \qquad \textbf{かつ} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)=0$$

$$\Rightarrow \quad f(a+h,b+k)-f(a,b)=\frac{1}{2}\left(Ah^2+2Bhk+Ck^2\right)+R_3(h,k),$$

$$A:=f_{xx}(a,b), \qquad B:=f_{xy}(a,b), \qquad C:=f_{yy}(a,b)$$

補題 3.13

Lemma (補題 3.13)

h と k の斉次 2 次式

$$\varphi(h,k) := Ah^2 + 2Bhk + Ck^2 \qquad (A,\ B,\ C \text{ は定数}) \qquad (**)$$

に対して

- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) > 0$ となるための必要十分条件は $A > 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- 任意の $(h,k) \neq (0,0)$ に対して $\varphi(h,k) < 0$ となるための必要十分条件は $A < 0$ かつ $AC - B^2 > 0$ である．
- φ が正の値も負の値もいずれもとるための必要十分条件は $AC - B^2 < 0$ となることである．
- それ以外（$AC - B^2 = 0$）の場合は，φ は符号を変えないが，$\varphi = 0$ となるような $(h,k) \neq (0,0)$ が存在する．

補題 3.13 の証明

$$\varphi(h,k) = Ah^2 + 2Bhk + Ck^2$$
$$= \begin{cases} A\left(h + \frac{B}{A}k\right)^2 + \frac{AC-B^2}{A}k^2 & (A \neq 0) \\ C\left(k + \frac{B}{C}h\right)^2 + \frac{AC-B^2}{C}h^2 & (C \neq 0) \\ 2Bhk & (A = C = 0) \end{cases}$$

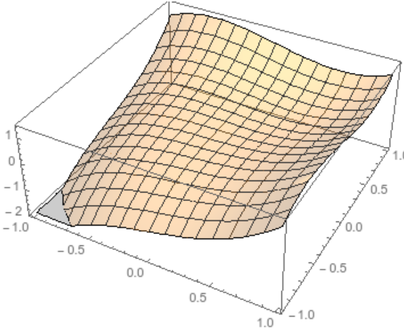
Q: (h,k) **の 2 次形式** $Q(h,k)$ **を用いて極大値を判定するときに，** $AC - B^2$ **の他に** A **の値を考えていたが，これは** A **の代わりに** C **の正負が分かる場合はそれを用いていいのだろうか．**

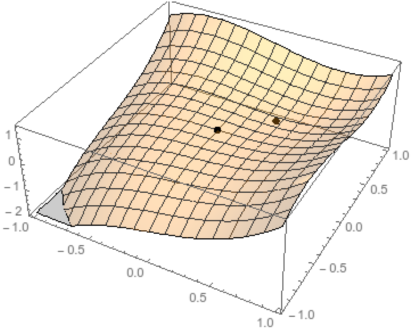
A: **そのとおり．** $AC - B^2 > 0$ **のときは，** A **の符号と** C **の符号が一致します．実際，このときは** $AC > B^2 \geq 0$**．**

例題 (問題 III-10)

次の関数の極値を調べる：

$$f(x,y) = x^3 - xy + y^3$$





例題 (問題 III-12)

次の関数の極値を調べる：

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^2 + y^4 - x^3 + y^3$$