

微分積分学第二 B 講義資料 8

お知らせ

- 1 月 22 日 (金) は「ジェネリック・スキル」測定試験「PROG」を受験していただきます。教育改革に伴う学生のジェネリック・スキルの現況調査が目的です。ご協力ください。通常の時間に通常の教室までおいでください。詳細は <http://www2.gakumu.titech.ac.jp/kyoumu/kaikaku/doc/2015prog.pdf>
- 1 月 26 日 (火) に中間試験を行います。講義 web ページ 参照。

前回までの訂正

- 講義後半で扱った例で “関数 $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + R(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x^2} = 0$ のとき, 「任意の $\varepsilon > 0$ に対して次をみたす $\delta > 0$ が存在する; $-\delta < x < \delta$ をみたく x に対して $-\varepsilon x^2 < R(x) < \varepsilon x^2$ 」
 \Rightarrow 「... ; $-\delta < x < \delta$ かつ $x \neq 0$ をみたく x に対して $-\varepsilon x^2 < R(x) < \varepsilon x^2$ 」
- 講義ノート 40 ページ, 一番下: 上限であるが \Rightarrow 上界であるが
- 講義ノート 48 ページ, 問題 IV-7 の (3): f が 0 で連続 \Rightarrow 導関数 f' が 0 で連続

授業に関する御意見

- 否定するから “でない” ってどういう意味ですか?? 山田のコメント: deny
- どもろがんでわすれてどもろがんで。山田のコメント: 承りました。
- 今日の授業は忙しかったです。でも面白かったです。
山田のコメント: ちょっと詰め込み過ぎなんです。申し訳ありません。ただ完全に理解してもらう必要はないと思うのです。どの程度かは、中間試験にて提示してみようと思います。
- 中間テストの平均点が 80 点くらいになるようにテストを簡単にして!! 山田のコメント: なんで?
- 現時点での受講者は何人ですか? 山田のコメント: 89
- 内容がこまかくむずかしい... 山田のコメント: そんなことはないと思います。十分におおざっぱな気がするんですけど。
- 用語が日本語発祥でないから仕方ないことだとは思いますが、用語が似ているのはとてもまぎらわしい。
山田のコメント: しようがないですね。「似たものを区別するかしないか」はその文脈・文化によって違うのだと思います。区別する必要がある、ということを実感として知って頂けるとよいです。
- 似た言葉が多くて困りました。山田のコメント: ですね。
- 授業を受けて自分の日本語が危うくなってきました。山田のコメント: そうでしょう。
- 80 年台は学籍番号が現在より 1 桁多かったんですね。山田のコメント: 大学が違うので比較できないかと。そのころの国立大学では元号 (昭和ですね) を使うところが多かったように思います。
- 前回, 提出用紙を昼休み後に出そうとしたら, きれいさっぱり忘れまして。やっぱりやるべき事を後回しにするのは良くないですね。山田のコメント: そうですね。山田もよくやらかしてしまいます。
- 山形県では㊦のことを “いちまる” と読むそうですがどうですか。山田のコメント: 知りませんでした。
- ありがとうございます。山田のコメント: どういたしまして。

質問と回答

- 質問: 数列 $\{a_n\}$ が α に, $\{b_n\}$ が β に収束するとき, $n \rightarrow \infty$ で $a_n^{b_n} \rightarrow \alpha^\beta$ は成り立ちますか? 証明の仕方や反例が思いつきませんでした。お答え: 仮定「 $\alpha > 0$ 」が必要。この仮定のもと, 主張は成り立つ: 実際, $c_n := \log a_n$, $d_n = \log a_n^{b_n} = b_n c_n$ と定めると $\log x$ の連続性と定理 4.21 から, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \log \alpha$ 。また積の極限公式 (問題 IV-6) から $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = \beta \log \alpha$ 。したがって再び定理 4.21 から $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{d_n} = e^{\beta \log \alpha} = \alpha^\beta$ 。
- 質問: 多変数関数の極限についても, 右側極限, 左側極限に相当するものは存在しますか。
お答え: 領域 D 上の関数 $f(x, y)$ に対して, $(x, y) \rightarrow (a, b)$ ((a, b) は D の境界の点) で $f(x, y) \rightarrow \alpha$ とは「 (a, b) に収束する任意の D の点列 $\{(x_n, y_n)\}$ に対して数列 $\{f(x_n, y_n)\}$ が α に収束すること」といえばよい。
- 質問: 定理 4.16 の言い換えに出て来た「収束する部分列」というものは何のかがわからないと書こうとしていたのですが, 書いている間に自己解決しました。部分列ももとの数列と同じく無限数列なんですね。
お答え: そのとおり。例えば, $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) で定まる数列 $\{1 + 1, -1 + \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{3}, -1 + \frac{1}{4}, \dots\}$ は収束しないが, 偶数番目だけを選ぶと 1 に収束する。これが, もとの数列の収束する部分列。
- 質問: 定義 4.2 や定義 4.17 で $|a_n - \alpha| < \varepsilon$, $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ をそれぞれ $|a_n - \alpha| \leq \varepsilon$, $0 < |x - a| \leq \delta$, $|f(x) - \alpha| \leq \varepsilon$ としてもさしつかえはありませんか。お答え: 大丈夫です。

質問： 公理 4.10 \Leftrightarrow 公理 4.12 (定理 4.12 のことか?) であり, この 2 つ以外にも実数の連続性について同様の公理 (山田注: 授業では同値な命題といったはず) があるとおっしゃっていましたが, その例についてもう少し詳しく教えていただきたいです. お答え: 次回, 級数を扱うところで「コーシー列の収束」を説明する. ほかに「デデキントの切断」「ワイエルストラスの区間縮小法」など.

質問: 任意の $\varepsilon > 0$ をとれるわけであるから $\varepsilon = \frac{2}{3}$ をとるならば, #5, 6 において (山田注: 黒板番号のことか) $-\frac{2}{3}x^2 < R(x) < \frac{2}{3}x^2$ とできてしまい, x^2 の符号をくつがえし得てしまうと思います. 何か ε に対する制約が必要ではないのでしょうか? お答え: 文脈を適当に想像して答えます: $\lim_{x \rightarrow 0} R(x)/x^2 = 0$ なので「任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ...」ということが成り立っている. それが「仮定」この時点で ε に制約はない. だから, 結論が導けるような ε をすきなように選んでよい. わざわざ結論が導けない $2/3$ をとる必要はない.

質問: ε - δ 式の定義による $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$ は挟みうちの原理と同様なものと考えて良いのでしょうか.

お答え: 「挟みうちの原理」の主張を書いてみてください. 山田が想像する「挟みうちの原理」とは違うと思いますが.

質問: 今回の授業で ε - δ 論法の話がありましたが, これを論法と呼ぶ理由が分かりませんでした. 極限の定義と呼ぶべきものではないのでしょうか? お答え: 山田もご質問のように思いますので, 「 ε - δ 論法と呼ばれている」という紹介は (たくさんの方がいうので) しますがそれ以外の場面ではこの語は使いません.

質問: ε - δ 論法と呼ばない人もいるのですか. お答え: 上の質問と回答. 山田はあまり呼ばないようにしたいです.

質問: 「等しくなくしながら」を「等しくないようにしながら」という表現にすると誤りとなりますか?

お答え: いいえ. 同じ意味だと思います. 前者の方が短いのでこの言い回しを使いました.

質問: $A := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ の上界の最小数 (上限) は $\sqrt{2}$ ではないのですか???

お答え: そうです. すなわち「有理数しか数として認めない」人には, 上界の最小数は存在しない, ということです.

質問: この実数に対する連続性の定義も幅広くみれば関数に関することですか? つまり実数も関数として見て定義することもできますか? お答え: 実数の連続性 (上に有界な集合は上限を持つ) は関数に関することですか?

質問: 「上に有界な \mathbb{R} の部分集合 ($\neq \emptyset$) はお上限をもつ」は公理として紹介されていましたが, これは定義 (上に有界であることの定義) とどう違うのでしょうか. 上に有界であることを冒頭のように定義すると, 不都合は生じるのでしょうか. お答え: 上限と上界を混同していませんか. 上限の定義は为什么呢.

質問: 講義ノート 46 にて (山田注: 46 ページのことか?) 真偽いずれかの値をとる分とあるが, 真偽のことを値とよんでいいのだろうか. お答え: よいです. 「ブール値」「Boolean」で検索.

質問: 講義ノート 46 ページ, 上から 9 行目, 「(4.3) 「 P ならば Q 」は「 $(P$ でない) または Q 」と同値」はどのようにして導けるのでしょうか? 命題の真偽は対偶と一致するので, 「 P ならば Q 」は「 $(Q$ でない) ならば $(P$ でない)」というの理解できるのですが. お答え: 「 $(P$ でない) または Q 」は「 P ならば Q 」の定義と思って下さい. あるいは, 「 P ならば Q 」の真偽の表を作ってみればよい (1 月 8 日の提示資料参照).

質問: 無理数の中には実数は含まれていますか. お答え: 実数の中に無理数が含まれているのでは?

質問: ド・モルガンの法則について, 高校よりもさらに拡大した解釈は可能ですか? お答え: 説明した気が.

質問: 自然数のうち 3 の倍数と 7 の倍数のそれぞれの個数の大小を次のように考えました. n を自然数であるとする. 1 以上 $21n$ 以下の自然数のうち, 3 の倍数は $7n$ 個, 7 の倍数は $3n$ 個である. $n \rightarrow \infty$ とすれば, 自然数全体での 3 の倍数の個数, 7 の倍数の個数を表す. とところで, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n}{3n} = \frac{7}{3} > 1$ なので, 3 の倍数の方が多いと考えました. この考えに論理的でない点はあるでしょうか.

お答え: ゴシックで書いた部分, 「個数」が定義できない可能性を排除しているところが穴. 無限個のものを数えるには慎重さが必要で, 考える問題によって数え方とその結果が違います. 「ヒルベルトのホテル」で検索.

質問: 収束値をもたない, とは? お答え: 収束値って何ですか?

質問: 連続の証明として「解空間を \sim 」とあったと思うのですが, 何とおっしゃったのでしょうか?

お答え: 「連続の証明」という語で何をさしているのかわかりません文脈を特定してください.

質問: 関数 f に対して $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$ ならば (以下略) じゃないですか. $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ のときはどっちなのですか? 授業中に説明してたらすみません. きいてなかったです. お答え: 問題 III-12 の解説として 1 月 8 日にやった. 本当に聞いてなかったのね. ちなみに, 佐藤雅彦の「じゃないですか禁止令」って読んだことあります?

質問: 下のギャグ (山田注: 略) を思いついてから永遠にこれしか頭にありませんでした. お答え: 困りましたね.

質問: 前期で学んだことをより理解できた. お答え: そう. で質問は?

質問: どこが分からないのかが分からなくなってきました. お答え: そうかも知れませんね.

質問: 今頃ですが, 2 月 9 日の火曜日の授業は無いんですか? お答え: ありますよ. 授業日程表参照.