微分積分学第二 B 中間試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 答案は 1 月 29 日の講義の際に返却する予定です. それ以降は**数学事務室 (本館 3 階 332B)** で受け取って下さい.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2016 年 2 月 5 日までに山田まで電子メイルでお申し出いただくか, 2 月 5 日の授業終了後までにご連絡ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.

指定用紙のみ持込可

定理など:

定理 A: 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^∞-級ならば, 任意の正の整数 n に対して,

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する. とくに $\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$ である.

定義 B: 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは, 任意の正の実数 ε に対して, 次をみたす番号 N が存在することである:「$n \geqq N$ をみたすすべての番号 n に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$」.

定義 C: 関数 f が $\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ をみたすとは, 任意の正の実数 ε に対して, 次をみたす正の数 δ が存在することである:「$0<|x-a|<\delta$ をみたす任意の x に対して $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$」.

定理 D: (実数の連続性公理の言い換え) 上に有界な単調非減少数列は収束する.

問題 A 文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{28}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a** の不等式を示しなさい. [40 点]

関数 $f(x)=\cos x$ に対して, $a=0$, $h=x$, $n=5$ として定理 **A** (冒頭枠内) を適用すると,

$$\cos x=\boxed{1}+\boxed{2}x+\boxed{3}x^2+\boxed{4}x^3+\boxed{5}x^4+\boxed{6}x^5+R_6(x),$$
$$R_6(x)=\boxed{7}\qquad(0<\theta<1)$$

と書ける. とくに $x=0.3$ とすると

$$\cos 0.3=\boxed{8}+R_6(0.3)\qquad {}_{\mathbf{a}}\underline{\boxed{9}<R_6(0.3)<\boxed{10}}$$

が成り立つ[1]. したがって, $\cos 0.3=\boxed{11}.\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}\boxed{20}\dots$[2] である.

一方,

$$\tan^{-1}x=\boxed{21}+\boxed{22}x+\boxed{23}x^2+\boxed{24}x^3+R_4'(x),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{R_4'(x)}{x^{\boxed{25}}}=0$$

となるので[3], 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+a+bx^2}{x(\tan^{-1}x-x)}$$

が存在するための条件は $a=\boxed{26}$, $b=\boxed{27}$ で, そのときの極限値は $\boxed{28}$ となる.

[1] $\boxed{8}$, $\boxed{9}$, $\boxed{10}$ には小数が入る. 10 の指数を用いた表示でもよい.
[2] $\boxed{11}$ – $\boxed{20}$ には, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる. 上の推論から, その桁の数字が確定する場合は, その数字を, そうでない場合は × を入れよ.
[3] $\boxed{25}$ には, 条件をみたす最大の整数が入る.

問題 B 文中の $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{8}$ に最もよく充てはまる数・式・×を入れなさい． [20 点]

2 変数関数 $f(x,y) = (x^2+y^2+1)^2 - 4x^2$ の偏導関数は $\boxed{1}$ であるから，これらがすべて 0 になるのは，x 座標が小さい順に $(x,y) = \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}$ である [4]．また f の 2 次偏導関数は $\boxed{6}$ であるから，f が極大値をとる点をすべて挙げると $(x,y) = \boxed{7}$, f が極小値をとる点をすべて挙げると $(x,y) = \boxed{8}$ である [5]．

問題 C 文中の $\boxed{1}$ 〜 $\boxed{6}$ に最もよく充てはまる数・式・言葉を入れなさい． [30 点]

次の定理を証明しよう：

> 点 a を含む開区間で定義された C^∞-級関数 f が $f'(a)=0$, $f''(a)<0$ をみたすならば f は a で極 $\boxed{1}$ 値をとる [6]．

証明： $f''(a) = -m\ (m>0)$ とおいて，テイラーの定理（冒頭の定理 A）を適用すると

$$(*) \qquad f(a+h) - f(a) = \boxed{2} + R_3(h), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{R_3(h)}{h^{\boxed{3}}} = 0$$

が成り立つ [7]．とくに $(*)$ の第二の式から

$$0 < |h| < \delta \quad \text{をみたす任意の } h \text{ に対して} \qquad \left|\frac{R_3(h)}{h^{\boxed{3}}}\right| < \boxed{4}$$

となるような正の数 δ が存在する．このとき，$-\delta < h < \delta\ (h \neq 0)$ をみたす h に対して

$$f(a+h) - f(a) = \boxed{5}\boxed{6}0$$

が成り立つ [8]．したがって f は a で極 $\boxed{1}$ 値をとる．

問題 D [10 点] 「任意の無限小数は実数を表す」ということを示しなさい．

問題 E [0 点]

(1) この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

(2) 1 月 22 日に行った PROG を受験された方は，解答用紙枠内に丸を記してください．もしお時間があったら感想も書いて頂けると幸いです．

おつかれさまでした ♡

---

[4] 条件をみたす (x,y) の組は 4 組以下である．答えが 4 組未満の場合は，余った解答欄に×印を入れよ．

[5] $\boxed{7}$, $\boxed{8}$: 該当する点がない場合は，解答欄に×を入れよ．

[6] $\boxed{1}$ には「大」または「小」が入る．

[7] $\boxed{3}$ には条件をみたす最大の整数が入る．

[8] $\boxed{6}$ には等号または不等号，$\boxed{5}$ にはこの結論を導く式変形全体が入る．

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–6/7/8/9–10+a/11–20/21–25/26–27/28: 各 5 点

1	2	3	4	5	6	7
1	0	$-\dfrac{1}{2}$	0	$\dfrac{1}{24}$	0	$\dfrac{-x^6}{720}\cos\theta x$

8	9	10
0.9553375	-1.25×10^{-6}	-7.5×10^{-7}

下線 a の理由：

$$\begin{aligned}
R_6(0.3) &= \frac{-(0.3)^6}{720}\cos(0.3\theta) \geqq \frac{-(0.3)^6}{720}\cos 0 = -\frac{3^6\cdot 10^{-6}}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\\
&= -\frac{81}{80}\times 10^{-6} \geqq -\frac{100}{80}\times 10^{-6} = -1.25\times 10^{-6}\\
R_6(0.3) &\leqq -\frac{81}{80}\cos 0.3\times 10^{-6} \leqq -\frac{81}{80}\cos\frac{\pi}{6}\times 10^{-6} = -\frac{81\sqrt{3}}{80\times 2}\times 10^{-6}\\
&\leqq -\frac{80\times\sqrt{3}}{80\times 2}\times 10^{-6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\times 10^{-6} \leqq -\frac{1.5}{2}\times 10^{-6} = -7.5\times 10^{-7}
\end{aligned}$$

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	9	5	5	3	3	6	×	×	×

21	22	23	24	25	26	27
0	1	0	$-\dfrac{1}{3}$	3	-1	$\dfrac{1}{2}$

28
$-\dfrac{1}{8}$

- $\boxed{25}$: 一般論としては 3 だが，この場合は 4 でも大丈夫なので，3, 4 ともに正解.
- 途中の誤った解答から正しい推論で得られたと思われる解答には得点を与えていることがあります.
- 11–20: 9–10 からの推論で得られる答を正解としています.
- 満点 22 名；cos が 1 を越えていた者：3 名（門前払いにしたい）

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1/2–5/6/7–8: 各 5 点

1

$$f_x = 4x(x^2+y^2-1), \quad f_y = 4y(x^2+y^2+1)$$

2	3	4	5
$(-1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	×

6

$$f_{xx} = 4(3x^2+y^2-1), \quad f_{xy} = f_{yx} = 8xy, \quad f_{yy} = 4(x^2+3y^2+1)$$

7	8
×	$(-1,0)$　$(1,0)$

- 途中の誤った解答から正しい推論で得られたと思われる解答には得点を与えていることがあります.
- 7, 8 のいずれにも $(0,0)$ が入っている答案がありました．極大値も極小値もとる，ということはありません（講義ノート III の極値の定義を見よ）.
- 満点 48 名

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

1	2	3	4
大	$-\dfrac{m}{2}h^2$	2	$\dfrac{m}{4}$

5

$$= -\frac{m}{2}h^2 + R_3(h) \leqq -\frac{m}{2}h^2 + \frac{m}{4}h^2 = -\frac{m}{4}h^2$$

6

$<$

問題 D の解答欄 配点：10 点

一般に，無限小数 $0.p_1p_2\dots$ が数 α を表すとは，

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \times 10^{-k} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

であたえられる数列 $\{s_n\}$ が α に収束することである．
ここで，任意の無限小数 $0.p_1p_2p_3\dots$ に対して上で定めた s_n は，

(1) 単調非減少である．実際 $s_{n+1} - s_n = p_{n+1} \times 10^{n+1} \geqq 0$ である．

(2) 上に有界である．実際，任意の n に対して

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} p_k \times 10^k \leqq \sum_{k=1}^{n} 9 \times 10^k = 9 \times \frac{1}{10}\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}} \leqq \frac{9}{10}\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

したがって，冒頭の定理 F から $\{s_n\}$ はある実数に収束する．この極限値が無限小数 $0.p_1p_2p_3\dots$ が表す実数である．

- C4: $\frac{m}{2}$ でも結論は導けるが，5 の式変形が正しくかけていなければ不正解．
- D: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n 10^{-n} = \alpha$ などとおいている人がいた．この級数が収束することを示すまでは左辺は「値」と認められないのでそれに等号を用いるのはまずい．
- 「実数の和は実数」では示したことになりません．実際 $1 + 1 + 1 + \dots$ は実数の（無限個の）和ですが，実数ではありません．
- 「実数である」の否定は「虚数である」ではない.「数を表さない」可能性を排除しないでください．

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎 (2016 年 1 月 26 日訂正; Ver. 4)
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 中間試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E (1) この授業に関するご意見，ご希望，ご誹謗，ご中傷などありましたらお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

(2) 1 月 22 日に行った PROG を受験された方は，解答用紙枠内に丸を記してください．もしお時間があったら感想も書いて頂けると幸いです．

回答欄

(1)

(2) $\boxed{}$ ご協力ありがとうございました．28 名の方が丸印をつけてくださいました

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2015 年度入学の方は，学籍番号のうち “15_” を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持込用紙・必需品（電話・時計不可）以外の物を鞄に入れ，机の下か足下に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	