

# 微分積分学第二 B (11)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

<http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc2/>

2016.02.02

# お知らせ

呼び出し 中間試験にて「**届け出たうえ欠席**」をされた方は申し出て下さい。定期試験予告用紙をお渡しします。

- 予定
- 2月5日(金) 講義：第VI節1回目；  
提出用紙あり；授業評価アンケート
  - 2月6日(土) 補講日：10時より「質問・雑談の時間」とします。
  - 2月9日(火) 講義：第VI節2回目；講義最終。
  - 2月12日(金) 定期試験

## ご意見から

ご意見： 中間の問題 C の 4 は答えとして当てはまるのが多すぎて戸惑った。

コメント： 世間（自称）が、「答えが1つ決まる問題なんて実社会では役に立たない」と叫んでいるのでこの位で戸惑ってはだめ。世間（自称）の皆様には「答が1つに決まる問題にさえ答えられない人間が何をいう」というべきかも。

ご意見： 極値判定でのヘシアン値であったり、今回の定理 5-29 や V-8 であったり、この辺りの話には、どうしても1つの方法だけでは適応しきれないのがあるのかと思って面倒だなと感じた。

コメント： 世の中だいたいそんなもんでしょ。

## ご意見から

ご意見： 「難易度が高い」とは「難度」が高いのでしょうか．それとも「易度」が高いのでしょうか？

コメント： 確かに変ですね．ここでは「難度が高い」．

ご意見： 土曜日に補講が予定されていたことをはじめて知りました．

コメント： 12月にお渡しした予定表にありましたが，見ていなかった？

ご意見： 2/6 (土) の講義は，通常の火曜日にするような講義はしないということですか？

コメント： しないんです．

## 質問から

Q: (誤) 講義資料 9 ; 持ち込み用紙の絵 .  
黒板 ; 単調非減少列となっていた

A: 講義資料 6 , 前回までの訂正の第 6 項を見よ .

## 質問から

- Q:  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$  は数の集合の中にはあるのでしょうか．また，実数でもなく虚数でもないなら，これに名前はありますか．
- A: これは「ただの絵」．数（とは何かわからないが）とは思えない．
- Q: 実数でも虚数でも複素数でもない数に分類名などはあるのでしょうか． / 「数」に限定すると，実数でないものは虚数ですか．
- A: 数って何？ 「実数でも複素数でもない数」の意味は？ 文脈により「数」は「実数」や「複素数」を表すことが多い．このときは「実数でも複素数でもない数」はありません．問題 D のコメントで挙げた「実数を定めないと仮定すると，虚数だから」は無理小数が「数を表さない」ことを排除していないから誤り．

## 質問から

- Q: 絶対収束という単語の「絶対」が「絶対  $\leftrightarrow$  相対」の絶対に思ってしまうのですが、絶対値と絶対は同じ意味をもつのでしょうか?
- A: ここでの「絶対収束」はむしろ「絶対値収束」というべきだと思います。すなわち、この文脈では「絶対」は「絶対値」のこと。実際「絶対値収束」という人もいますが、一般的ではないようです。
- Q: 絶対収束，相対収束という新たな概念が出てきましたが，これらは次の「べき級数」という単元と関連はありますか？
- A: 相対収束という語はないと思います。講義では「条件収束」と言いましたね。  
後半：おおあり。

## 質問から

Q: 定理 5.24 では “ $\sum |a_n|$  が収束  $\Rightarrow \sum a_n$  が収束” ですが、それでは何故 “ $\sum a_n$  が絶対収束  $\Leftrightarrow \sum |a_n|$  が収束” となるのでしょうか．“ $\sum a_n$  が絶対収束  $\Leftrightarrow \sum |a_n|$  が収束” とする私の認識が誤りなのでしょうか（絶対収束の意味自体が怪しい）

A: ご質問の中の “ $\Leftrightarrow$ ” の部分はこの文脈では定義．

講義ノート 58 ページの定義 5.23 ．

説明したはずなので「意味自体が怪しい」のはまずい．

Q: 絶対収束が絶対値をつけた級数の収束で、条件収束は絶対値をつけない級数の収束ということですか？

A: 講義ノート 59 ページ

Q:  $|a_n| \leq b_n$  となる  $b_n$  で  $\sum b_n$  が収束するものがあれば、 $\sum a_n$  は絶対収束する、ということであっていますか．また、それはなぜ．

A: 講義ノート 58 ページ，系 5.26 ．

## 質問から

Q: V-8  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_{n+1}/a_n| = \alpha$  ( $0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n$  は絶対収束,  $\alpha > 1 \Rightarrow$  発散) という板書がありました。が、 $\alpha \neq 0$  なのに「 $0 < \alpha < 1$ 」ではなく「 $0 \leq \alpha < 1$ 」としたことに何か意図がありますか？

A:  $\alpha \neq 0$  と思った理由はなんでしょう。

$$a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

実際

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots = e \quad (\text{収束})$$

## 質問

Q: 条件収束は，和の順序をかえると NG で，たとえば  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$  は好きな数字に収束させられる，とききましたが，どうもじっくりきません．8 (その時の例) までプラスの項を足して，そこから 8 の回りを上下させるようにプラスの項とマイナスの項を足したとしても無限まで足せば  $\log 2$  になるのでは，と考えてしまいます．

A: 「無限まで足せば」の足す順番が大事 (一度には足せない) ．

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2,$$
$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots = \frac{3}{2} \log 2.$$

この 2 つの級数に現れる項は全く同じ ．

## 質問から

Q: 条件収束が悪い数列で、和の順序をかえたら 8 に収束できると言われましたが、**絶対収束絶対収束**も同様に 8 を超えるまで正の項を足し超えたら 8 を下回るまで負の項を足し... というのをやっていけば 8 に収束させられると思います。どの点が条件収束と異なって良い数列といえるのかわかりません。

A:  $\{a_n\}$  の非負な項を集めた数列  $\{p_j\}$  と負の項を集めた数列を  $\{-q_j\}$  を考えると、 $\sum a_n$  が条件収束するなら、 $\sum p_j$ ,  $\sum q_j$  はともに  $+\infty$ 。

(実際、どちらも収束するなら  $\sum a_n$  は絶対収束、一方のみが収束するなら  $\sum a_n$  は発散。)

このことから「8 を超えるまで正の項を足していく」操作ができる。

絶対収束する級数では項がはやく 0 に近づいてしまうので、目標とする値を超えるまで足していくことができない。