2016 年 2 月 2 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 10

前回までの訂正

- 講義の黒板 14 ページ（らしい）: $|a_N|r^{n-N} \Rightarrow |a_N|r^{n-1+N}$.
- 講義ノート 50 ページ，下から 2 行目：部分和はは ⇒ 部分和は

授業に関する御意見

- 中間の問題 C の $\boxed{4}$ は答えとして当てはまるのが多すぎて戸惑った.　**山田のコメント：** 世間（自称）が,「答えが 1 つ決まる問題なんて実社会では役に立たない」と叫んでいるのでこの位で戸惑ってはだめ．まあ「答が 1 つに決まる問題にさえ答えられない人間が何をいう」という感じか.
- 極値判定でのヘシアンの値であったり，今回の定理 5-29 や V-8 であったり，この辺りの話には，どうしても 1 つの方法だけでは適応しきれないのがあるのかと思って面倒だなと感じた.　**山田のコメント：** 世の中だいたいそんなもんでしょ.
- また高校数学みたいなことがでてきたと思った.　**山田のコメント：** 高等学校で学ぼうが大学で学ぼうが，数学は数学.
- 今回のテストの平均点はどれくらいをイメージして作りましたか?　**山田のコメント：** 受験数が予想できないのでわからない.
- sup の発音がおいしそうでした.　**山田のコメント：** そう？午後のクラスなのに.
- 級数が "絵" だという発想はなるほどと思いました.　**山田のコメント：** そう？
- 「難易度が高い」とは「難度」が高いのでしょうか．それとも「易度」が高いのでしょうか?　**山田のコメント：** ここでは「難度が高い」.
- 土曜日に補講が予定されていたことをはじめて知りました.　**山田のコメント：** 12 月にお渡しした予定表にありましたが，見ていなかった？
- 2/6 (土) の講義は，通常の火曜日にするような講義はしないということですか?　**山田のコメント：** しないんです.
- ありがとうございます.　**山田のコメント：** どういたしまして.

質問と回答

質問： 定理 5.24 の逆が成立しないことについてもう少し詳しく教えてください.

お答え： 収束するが，絶対収束しない級数が存在する．実際 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ が反例.

質問： 絶対収束，相対収束という新たな概念が出てきましたが，これらは次の「べき級数」という単元と関連はありますか.　**お答え：**相対収束という語はないと思います．講義では「条件収束」と言いましたね．後半：おおあり.

質問： 絶対収束という単語の「絶対」が「絶対 ↔ 相対」の絶対に思えてしまうのですが，絶対値と絶対は同じ意味をもつのでしょうか?　**お答え：**ここでの「絶対収束」はむしろ「絶対値収束」というべきだと思います．すなわち，この文脈では「絶対」は「絶対値」のこと．実際「絶対値収束」という人もいますが，一般的ではないようです.

質問： 定理 5.24 では "$\sum |a_n|$ が収束 $\Rightarrow \sum a_n$ が収束" でしたが，それでは何故 "$\sum a_n$ が絶対収束 $\Leftrightarrow \sum |a_n|$ が収束" となるのでしょうか．"$\sum a_n$ が絶対収束 $\Leftrightarrow \sum |a_n|$ が収束" とする私の認識が誤りなのでしょうか.（絶対収束の意味自体が怪しい）　**お答え：**ご質問の中の "⇔" の部分はこの文脈では定義．講義ノート 58 ページの定義 5.23．これが「定義」だということは講義でも説明した．したがって「意味自体が怪しい」のはまずい.

質問： 絶対収束が絶対値をつけた級数の収束で，条件収束は絶対値をつけない級数の収束ということですか?

お答え： いいえ，絶対収束しないが収束する級数の収束を条件収束という．講義ノート 59 ページ.

質問： $|a_n| \leqq b_n$ となる b_n で $\sum b_n$ が収束するものがあれば，$\sum a_n$ は絶対収束する，ということであっていますか．また，それはなぜ.　**お答え：**講義ノート 58 ページ，系 5.26．理由も書いてありますね.

質問： V-8 $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = \alpha$ （$0 \leqq \alpha < 1 \Rightarrow \sum a_n$ は絶対収束，$\alpha > 1 \Rightarrow$ 発散）という板書がありましたが，$\alpha \neq 0$ なのに「$0 < \alpha < 1$」ではなく「$0 \leqq \alpha < 1$」としたことに何か意図がありますか?

お答え： $\alpha \neq 0$ と思った理由はなんでしょう．0 になることもあります．たとえば $a_n = 1/n!$.

質問： 条件収束が悪い数列で，和の順序をかえたら 8 に収束できると言われましたが，絶体収束（原文ママ）も同様に 8 を超えるまで正の項を足し超えたら 8 を下回るまで負の項を足し... ということをやっていけば 8 に収束させられると思います．どの点が条件収束と異なって良い数列といえるのかわかりません.　**お答え：**$\{a_n\}$ の非負な項を集めた数列 $\{p_j\}$ と負の項を集めた数列を $\{-q_j\}$ を考えると，$\sum a_n$ が条件収束するなら，$\sum p_j, \sum q_j$ はともに $+\infty$．このことから「8 を超えるまで正の項を足していく」操作ができる．絶対収束する級数ではこれができない.

質問： 「条件収束する級数は和の順序を変えることで任意の値に収束させせられる」というのは数学的に一般にいえることなのでしょうか．また $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$ はたとえば 8 に収束するよう順序を変えられるとのことですが，その値（今は 8）に制約はないのでしょうか． **お答え：**定理です．講義ノート 59 ページ，注意 5.32.

質問： 条件収束が悪いと言ったが，具体的にどういう意味で悪いのか． **お答え：**上の質問の様なことがあるので悪い.

質問： 条件収束は，和の順序をかえると NG で，たとえば $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\log 2$ は好きな数字に収束させせられる，とききましたが，どうもしっくりきません．8 (その時の例) までプラスの項を足して，そこから 8 の回りを上下させるようにプラスの項とマイナスの項を足したとしても無限まで足せば $\log 2$ になるのでは，と考えてしまいます． **お答え：**「無限まで足せば」の足す順番が大事（一度には足せない）．実例として $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\log 2$, $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\dots=\frac{3}{2}\log 2$. この 2 つの級数に現れる項は全く同じ.（この等式の理由を調べてみよう）

質問： $\lim_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n|=\alpha<1$ から $\sum a_n$ が収束することを示す議論中で，かなり雑な比較をしても示せることに驚いたが，講義内では収束するか否かを中心に話をして，その値は気にしないのだろうか.

お答え： 「収束する」と「値を求める」は全く違った議論．収束性を示すにはさまざまな一般論が適用できることが多いが，値を求めるのは問題毎にアタックする必要があることが多い.

質問： $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ はいくつになるのか気になった． **お答え：**皆さんの知っている数による表示はないようです.

質問： $\limsup$ の sup というのはどのような言葉から出来たものですか? **お答え：**講義ノート 40 ページ脚注 9.

質問： $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ は $\lim_{n\to\infty}|\sup\sqrt[n]{|a_n|}$ という意味なのか，$\lim_{n\to\infty}|\sup\sqrt[n]{|a_n|}$ か． **お答え：**後者．$\limsup$ で一語.

質問： $\limsup$ は $\lim$ と sup が 1 つになったものですか．それとも並べて書いているだけですか． **お答え：**前者.

質問： $\sum_{n=0}^{\infty}r^n=\frac{1}{1-r}$ （$|r|<1$）は $r=0$ のときも成り立つと考えてよいのですか． **お答え：**たしかに $r=0$ のとき，左辺の第 1 項は 0^0 という不定形になりますね．テイラーの定理の一般形と同じように（講義ノート 9 ページ，脚注 25）この文脈では左辺第 1 項を 1 と考えることにすれば，確かに等式が成り立つことがわかります.

質問： （山田注：54 ページ 4 行目の式があって）どうやって求めるのですか? **お答え：**第 VI 節でやってみる.

質問： 全てが負の関数（原文ママ：数列のことか；中間試験問題 D の「単調非減少数列」を「関数」と書いた人が多かったが変だよね，という説明をしましたよね！）（例：$a_n=-\frac{1}{n^2}$）の級数において，絶対収束を調べるときも，絶対値をとらなければならないのですか? **お答え：**とってもとらなくても同じじゃないですか?

質問： 調和級数は，調和数列と何か関係がありますか． **お答え：**調和数列：$\{\frac{1}{n}\}$．調和級数：$\sum\frac{1}{n}$．関係あるよね.

質問： $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ は数の集合の中にはあるのでしょうか．また，実数でもなく虚数でもないなら，これに名前はあるのでしょうか． **お答え：**これは「ただの絵」．数（とは何かわからないが）とは思えない.

質問： 実数でも虚数でも複素数でもない数に分類名などはあるのでしょうか．/「数」に限定すると，実数でないものは虚数ですか． **お答え：**数って何? 「実数でも複素数でもない**数**」の意味は? 文脈により「数」は「実数」や「複素数」を表すことが多い．このときは「実数でも複素数でもない数」はありません．問題 D のコメントで挙げた「実数を定めないと仮定すると，虚数だから」は無限小数が「数を表さない」ことを排除していないから誤り.

質問： 一般項が $a_n=(\frac{1}{2}i)^n$ ($n=0,1,\dots,i$ は虚数単位）で表される数列 $\{a_n\}$ は $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}|a_k|=2$ となり絶対収束するので，$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k$ も収束するとなるのですが，虚数が混ざっている為，$\sum_{k=0}^{n}a_k$ は上からも下からも押さえることができないのに，「$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}a_k$ は収束する」と言っても良いのでしょうか.

お答え： まず注意ですが，この講義では数の範囲を実数に限っています．「絶対収束するならば収束」という定理も実数の範囲に限って証明を与えているので，ご質問の「収束するとなるのですが」は自明ではありません．しかし，実はこの性質は複素数を成分とする級数でも成り立ちます．ここで，複素数列 $\{s_n\}$ が s に収束する，とは実数を成分とする数列 $\{|s_n-s|\}$ が 0 に収束することと定めます．ご質問のケースでは，和は $\frac{2}{5}(2+i)$．実際

$$\sum_{k=0}^{n}a_k=\frac{2}{5}(2+i)\left(1-\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}\right)\quad \text{なので}\quad \left|\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\right)-\frac{2}{5}(2+i)\right|=\left|-\frac{2}{5}(2+i)\left(\frac{i}{2}\right)^{n+1}\right|=\frac{1}{2^n}\to 0.$$

質問： どんな絵ですか? ($\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m$ 絵 について） **お答え：**こんな絵.

質問： 高校時代，大学では「はさみうちの原理」ではなく「はさみうちの定理」として教わるかもしれないと耳にしました．ですが，講義の板書では「はさみうちの原理」となっていたと思います．「はさみうち」は他の原理からは証明できないものなのでしょうか． **お答え：**講義ノート補題 4.6 で証明してありますよ．ノートでは「はさみうち」板書では「はさみうちの原理」と書いたのは，大上段に「定理」というほどのものではない，というニュアンス.

質問： （誤）講義資料 9；持ち込み用紙の絵．黒板；単調非減少列となっていた

お答え： 講義資料 6，前回までの訂正の第 6 項を見よ.