微分積分学第二 B (12)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc2/

2016.02.05

お知らせ

授業評価 申告番号 $\boxed{\mathbf{1064}}$ (右寄せ)

呼び出し 中間試験にて「届け出たうえ欠席」をされた方は申し出て下さい．定期試験予告用紙をお渡しします．

予定

- 2 月 5 日（金）講義：第 VI 節 1 回目；提出用紙あり；授業評価アンケート
- 2 月 6 日（土）補講日：10 時より「質問・雑談の時間」とします．
- 2 月 9 日（火）講義：第 VI 節 2 回目；講義最終．
- 2 月 12 日（金）定期試験

絶対収束性の判定

Theorem 1 (定理 5.29 の特別な場合)

数列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ に対して，極限値

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

が存在するとき

1. $\alpha < 1$ なら級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は絶対収束する．
2. $\alpha > 1$ なら級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は発散する．

定理 5.29 では，

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \qquad (+\infty \text{ までゆるせば必ず存在する．})$$

Theorem 1 の証明の準備

Theorem 2 (命題 5.6，注意 5.7)

負でない実数からなる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある番号 N から先の任意の n に対して $a_n \leq b_n$ をみたしているとする．このとき

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ が収束するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ も収束する．
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ が発散するならば $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ も発散する．

Theorem 2 , (1) は実数の連続性からの帰結（定理 4.12）による：

上に有界な単調非減少数列は収束する．

また，(2) は，定理 5.2

$\sum a_n$ が収束するならば $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$

の対偶（系 5.3）による．

Theorem 1 の証明の準備

Theorem 3 (例 5.5)

等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ は

- $|r| < 1$ のときは収束する．
- $|r| \geq 1$ のときは発散する．
  とくに $r > 1$ なら正の無限大に発散する．

Definition 4 (数列の極限; 定義 4.2)

数列 $\{a_n\}$ が実数 α に**収束する**とは，次が成り立つことである：

任意の正の実数 ε に対して以下をみたす番号 N が存在する：

$n \geq N$ をみたす任意の番号 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ．

Theorem 1の証明 (1)

$\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ の場合：

- $\dfrac{1-\alpha}{2} > 0$ である．
- したがって，次をみたす番号 N が存在する（定義 4）：
  $n \geq N$ をみたすすべての n に対して
  $$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - \alpha \right| < \frac{1-\alpha}{2}. \qquad (*)$$
- 式 ($**$) を変形すると $n \geq N$ をみたす任意の n に対して
  $$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1+\alpha}{2}.$$
- すなわち $n \geq N$ をみたす任意の n に対して
  $$|a_n| < \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n.$$

Theorem 1 の証明 (1) （続き）

$\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ の場合（続き）：

- $n \geq N$ をみたす任意の n に対して

$$0 \leq |a_n| < \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n = r^n \qquad \left(r := \frac{1+\alpha}{2}\right).$$

- $0 < r < 1$ なので，定理 3 より $\sum r^n$ は収束する．
- したがって 定理 2 より $\sum |a_n|$ は収束する．
- 絶対収束の定義から $\sum a_n$ は絶対収束する． $\square$

Remark 1

このことから，とくに $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ は収束する（定理 5.24）．

Theorem 1 の証明 (2)

$\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ の場合：

- $\dfrac{\alpha - 1}{2} > 0$ である．
- したがって，次をみたす番号 N が存在する（定義 4）：

  $n \geq N$ をみたすすべての n に対して

$$\left| \sqrt[n]{|a_n|} - \alpha \right| < \frac{\alpha - 1}{2}. \qquad (**)$$

- 式 $(**)$ を変形すると $n \geq N$ をみたす任意の n に対して

$$\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1+\alpha}{2}.$$

- すなわち $n \geq N$ をみたす任意の n に対して

$$|a_n| > \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n.$$

Theorem 1 の証明 (2) （続き）

$\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$ の場合（続き）：

- $n \geq N$ をみたす任意の n に対して

$$|a_n| > \left(\frac{1+\alpha}{2}\right)^n = r^n \qquad \left(r := \frac{1+\alpha}{2}\right).$$

- $r > 1$ なので，定理 3 より $\sum r^n$ は発散する．
- したがって 定理 2 より $\sum |a_n|$ は発散する．

注意

定理 1 の $\alpha := \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ **が** 1 **の場合はさまざまなケースがある.**

Remark 2 (問題 IV-2)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

以下は $\alpha = 1$ **の例**

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$: **発散**
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: **収束（絶対収束）**
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$: **収束（条件収束）**
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$: **絶対収束.**