微分積分学第二 B (14)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/class/2015/calc2/

2016.02.09

お知らせ

- 定期試験：2 月 12 日（金曜日）
  定期試験予告＋持ち込み用紙は，中間試験の答案に添付してあります．
  中間試験答案を受け取っていない方は数学事務室（本館 3 階 332B）にて受け取って下さい．
- 定期試験の答案は 2 月 15 日午後以降に，数学事務室（本館 3 階 332B）にて返却する予定です．
  答案・成績に関する日程は，定期試験の問題に書いておきます．

Q and A

Q: 「級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}$ の和を小数で表したとき，小数第一位はいくつか」という問題で，どのように解けばよいのかさっぱりわかりません．解答の方針のヒントをおしえていただけませんか．
（演習の小テストで出た問題なのですが，略解のプリントしか渡されていないので，解説がないのです.）

A: この級数の和は $2e$ なので答えは 4．
ヒント：

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}.$$

Q and A

Q: $\frac{3n+1}{3n+4} < 1$ **だから** $|x| = 1$ **のときも収束にしていいですか？**
$\leftarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$.

A: **だめです．収束するための条件は極限値が** 1 **より小さいことであって，その手前でいくら** 1 **より小さくても極限値が** 1 **ならここでの判定法は使えません．**

Q and A

Q: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\log n}\ \text{が収束することを示せ}}$

$\frac{1}{3} < \frac{1}{e^{\frac{100000001}{100000000}}}$ なので

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{\log n} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{100000001}{100000000}}}$$

$\frac{100000001}{100000000} > 1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{100000001}{100000000}}}$ は収束ゆえ，示せた．

でよいですか．$\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$ とすると，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ は発散するので両側からはさむことができません．

A: 下側は 0 でおさえられているから，挟めてませんか?
上側と下側の和が等しくならなくても収束することだけはわかります．

Q and A

Q: Fact

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\alpha \text{ が存在する} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ の収束半径は } \frac{1}{\alpha}\text{」}$$

と初めに記し，後から「$\lim_{n\to\infty}$」を「$\limsup_{n\to\infty}$」に上書きしていましたが，この上書きは必須なのでしょうか．
演習の授業では「今は『$\limsup_{n\to\infty}$』を単に『$\lim_{n\to\infty}$』とみなして考えても差し支えない」とのことでした（コーシーの判定法）．
「今は」という言及があったことも考えると，あるところからは「$\lim_{n\to\infty}$」では駄目で「$\limsup_{n\to\infty}$」でなければならないという一線があるのでしょうか．

Q and A

A: **講義ノートの定理 6.3 に相当すること．定理 6.3 では $\limsup$ を用いているが，ご質問の Fact の主張にあるような「$\limsup$ が存在するとき」と書いていないことに注意してください．$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ は正の無限大まで許せば必ず存在する（実数の連続性から導ける，講義ノート 54 ページあたり）ので,「存在するとき」という条件が不要になるのです．もし，$\lim$ が存在するならば $\limsup$ は $\lim$ と一致することがわかるので，黒板に書いた Fact は定理 6.3 に含まれてしまう（定理 6.3 より弱い定理）わけです．たとえば**

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots \qquad \text{の係数は} \qquad 1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{5} \dots$$

と 1 個おきに 0 になり，問題にしている極限は存在しないが，上極限は 1 になるので "$\lim$" 版の定理ではなく "$\limsup$" が必要になります．

Q and A

Q: **講義終盤の方で** $f(x)=\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ **に対して** $x=1$ **で収束するということでしたが，それなら** $x=1$ **でも収束するはずではないのですか?** $\frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1+x+x^2}\to-\infty$ $(x\to-1-0)$ **となり発散してしまいませんか?**

A: **何が** $x=1$ **で収束するのでしょう．講義で扱った状況なら，**

$$x-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^7-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1}=\int_0^x\frac{dt}{1+t^3}$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+\frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

の左辺の級数は $x=1$ **で収束するということですね．このことからなぜ** $x=-1$ **で収束すると思えるのでしょうか．**