

2016年2月09日(2016年2月09日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 講義資料 13

お知らせ

- 今学期の講義は今回で最終になります。四半学期制の施行により不都合な点があったと思います。ご協力ありがとうございました。
- 定期試験は2月12日です。定期試験予告+持ち込み用紙は、中間試験の答案に添付してあります。中間試験答案を受け取っていない方は数学事務室(本館3階332B)にて受け取って下さい。
- 定期試験の答案は2月15日午後以降に、数学事務室(本館3階332B)にて返却する予定です。答案・成績に関する日程は、定期試験の問題に書いておきます。

前回までの訂正

- 講義ノート63ページ, 下から6行目の右辺: $\sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

授業に関する御意見

- 「わあい! 収束半径~. あかり, 収束半径大好き!」 山田のコメント: そうなんですか。
- ムズカスィーデス 山田のコメント: ヨカッタデス
- 巾級数とテストに書いてもよいのですか? 山田のコメント: はい. よく使われる嘘字なので。
- 人が少ない 山田のコメント: ですよ。
- 講義 山田のコメント: ですよ。
- この前卒検受かりました! 9ヶ月かかってやっと卒業です! 山田のコメント: おめでとう。

質問と回答

質問: 講義終盤の方で $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ に対して $x=1$ で収束するという事でしたが, それなら $x=-1$ でも収束するはずではないのですか? $\frac{1}{6} \log \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} \rightarrow -\infty (x \rightarrow -1-0)$ となり発散してしまいませんか?

お答え: 何が $x=1$ で収束するのでしょうか. 講義で扱った状況なら,

$$x - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{6}x^7 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1} = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3} = \frac{1}{6} \log \frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}$$

の左辺の級数は $x=1$ で収束するという事ですね. このことからなぜ $x=-1$ で収束すると思えるのでしょうか. $\log(1+x)$ の冪級数展開でも同じことがおきますね. (もし $x=1$ で絶対収束するならば, $x=-1$ でも収束します. 当たり前ですが.)

質問: 「 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\log n}$ が収束することを示せ」について, 「 $\frac{1}{3} < \frac{1}{e^{\frac{1000000001}{1000000000}}}$ なので $0 < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{\log n} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1000000001}{1000000000}}}$.

$\frac{100000001}{100000000} > 1$ より $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1000000001}{1000000000}}}$ は収束ゆえ, 示せた。」でよいですか. $\frac{1}{3} < \frac{1}{e}$ とすると, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散するので両側からはさむことができません.

お答え: 下側は0でおさえられているから, 挟めてませんか? 上側と下側の和が等しくならなくても収束することだけはわかります. だから「ぎちぎちと挟む」必要はありません.

質問: Fact 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$ が存在する $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径は $\frac{1}{\alpha}$ 」と初めに記し、後から「 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 」を「 $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ 」に上書きしていましたが、この上書きは必須なのでしょうか。演習の授業では「今は『 $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ 』を単に『 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 』とみなして考えても差し支えない」とのことでした(コーシーの判定法)。「今は」という言及があったことも考えると、あるところからは「 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ 」では駄目で「 $\limsup_{n \rightarrow \infty}$ 」でなければならないという一線があるのでしょうか。

お答え: これは講義ノートの定理 6.3 に相当すること。定理 6.3 では \limsup を用いているが、ご質問の Fact の主張にあるような「 \limsup が存在するとき」と書いていないことに注意してください。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ は正の無限大まで許せば必ず存在する(実数の連続性から導ける、講義ノート 54 ページあたり)ので、「存在するとき」という条件が不要になるのです。もし、 \lim が存在するならば \limsup は \lim と一致することがわかるので、黒板に書いた Fact は定理 6.3 に含まれてしまう(定理 6.3 より弱い定理)わけです。たとえば

$$x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \dots \quad \text{の係数は} \quad 1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, \dots$$

と 1 個おきに 0 になり、問題にしている極限は存在しないが、上極限は 1 になるので「 \lim 」版の定理は使えないケースになっています。

質問: 「級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!}$ の和を小数で表したとき、小数第一位はいくつか」という問題で、どのように解けばよいかさっぱりわかりません。解答の方針のヒントをおしえていただけませんか。(演習の小テストで出た問題なのですが、略解のプリントしか渡されていないので、解説がないのです。)

お答え: 菅先生の意図はどこにあるか知りませんが、解答: まず

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!}$$

であることを思い出そう。第 2, 3 の表示は、たんに番号の付け方を変えただけで最初の級数と全く同じもの。ここで 2 つの級数 $\sum a_n, \sum b_n$ がそれぞれ A, B に収束するならば、 $\sum (a_n + b_n)$ は $A + B$ に収束することをいれば、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(n-1)}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} = 2e.$$

だから、答えは 4。

質問: 収束半径 r が存在しない場合はありますか。

お答え: $0, +\infty$ も許せば必ず存在します(実数の連続性による)。講義ノート 62 ページ (6.3) 式で与えられます。

質問: 今更ですが、Taylor の定理は条件を満たすすべての関数を表すことができるという証明はあるのでしょうか。

お答え: 何を問うているのかわかりません。証明以前に「どういう命題を示したいのか」をはっきり書いてみましょう。

質問: $\frac{3n+1}{3n+4} < 1$ だから $|x| = 1$ のときも収束にしているのですか? $\leftarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n+1}$ 。

お答え: だめです。収束するための条件は極限值が 1 より小さいことであって、その手前でいくら 1 より小さくても極限值が 1 ならここでの判定法は使えません。

質問: 収束半径に $|x| = r$ が含まれるかどうかの見分け方はありますか。

お答え: 収束する範囲に、収束半径の「端の点」が含まれるかどうかですね。一般的な方法はないと思います。

質問: 冪級数の項別微分のときに $(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)'$ や $\frac{d}{dx}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots)$ などと記述してもよいですか?

お答え: よいです。

質問: sup は何の略ですか? lim は limit, max は maximum など。

お答え: 2月2日付けの講義資料 10, 2 ページ, 6 つめの質問。

質問: ラジカルだとカルボカチオンに比べてアリル型の安定性が高いのはどうしてですか。

お答え: 安定性ってどうやって測るんでしょうね。