2016 年 2 月 12 日 13 時 20 分 ~14 時 40 分
山田光太郎 (2016 年 2 月 13 日訂正; Ver. 3
kotaro@math.titech.ac.jp

微分積分学第二 B 定期試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読み, 理解できるように書いてください.
- 裏面・計算用紙は下書き, 計算などに使用できますが, 採点の対象とはしません.
- 答案は 2 月 15 日昼以降に**数学事務室 (本館 3 階 332B)** にて返却いたします.
- 採点に関して質問・クレイムなどがある方は, 2016 年 2 月 22 日までに山田まで電子メイルでお申し出ください. なお, 管理の都合上, 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**.

指定用紙のみ持込可

定理 A: 関数 f が a と $a+h$ を含む区間で C^∞-級ならば, 任意の正の整数 n に対して,

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k+R_{n+1}(h),\qquad R_{n+1}(h)=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)h^{n+1},\qquad 0<\theta<1$$

を満たす θ が存在する. とくに $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0$ である.

定義 B: 数列 $\{a_n\}$ が α に収束するとは, 任意の正の実数 ε に対して, 次をみたす番号 N が存在することである:「$n \geqq N$ をみたすすべての番号 n に対して $|a_n-\alpha|<\varepsilon$」.

定義 C: 関数 f が $\displaystyle\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ をみたすとは, 任意の正の実数 ε に対して, 次をみたす正の数 δ が存在することである:「$0<|x-a|<\delta$ をみたす任意の x に対して $|f(x)-\alpha|<\varepsilon$」.

定理 D: 上に有界な単調非減少数列は収束する.

定理 E: 絶対収束する級数は収束する.

定理 F: 等比級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}r^n$ は $|r|<1$ のときは収束し, $|r|\geqq 1$ のときは発散する.

定理 G: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

定理 H: 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が, ある番号 N 以降で $0\leqq a_n\leqq b_n$ を満たし, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n$ が収束するならば, 級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ も収束する.

問題 A 文中の $\boxed{1}$~$\boxed{27}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a** の不等式を示しなさい. [40 点]

関数 $f(x)=\sin x$ に対して, $a=0$, $h=x$, $n=4$ として定理 **A**（冒頭枠内）を適用すると,

$$\sin x=\boxed{1}+\boxed{2}x+\boxed{3}x^2+\boxed{4}x^3+\boxed{5}x^4+R_5(x),\qquad R_5(x)=\boxed{6}\quad(0<\theta<1)$$

と書ける. とくに $x=0.6$ とすると

$$\sin 0.6=\boxed{7}+R_5(0.6)\qquad {}_{\mathbf{a}}\ \underline{\boxed{8}<R_5(0.6)<\boxed{9}}$$

が成り立つ[1]. したがって, $\sin 0.6=\boxed{10}.\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}\boxed{15}\boxed{16}\boxed{17}\boxed{18}\boxed{19}\dots$[2]
である. 一方,

$$\log(1+x)\tan x=\boxed{20}+\boxed{21}x+\boxed{22}x^2+\boxed{23}x^3+R_4'(x),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{R_4'(x)}{x^{\boxed{24}}}=0$$

となるので[3], 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)\tan x-x^2}{\sin x+a+bx}$$

が存在するための条件は $a=\boxed{25}$, $b=\boxed{26}$ で, そのときの極限値は $\boxed{27}$ となる.

[1] $\boxed{7}$, $\boxed{8}$, $\boxed{9}$ には小数が入る. 10 の指数を用いた表示でもよい.
[2] $\boxed{10}$–$\boxed{19}$ には, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 または × を入れる. 上の推論から, その桁の数字が確定する場合は, その数字を, そうでない場合は × を入れよ.
[3] $\boxed{24}$ には, 条件をみたす最大の整数が入る.

問題 B 文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{8}$ に最もよく充てはまる数・式・×を入れなさい． [20 点]

2 変数関数 $f(x,y)=x^3-xy+y^3$ の偏導関数は $\boxed{1}$ であるから，これらがすべて 0 になるのは，x 座標が小さい順に $(x,y)=\boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{5}$ である [4]．また f の 2 次偏導関数は $\boxed{6}$ であるから，f が極大値をとる点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{7}$, f が極小値をとる点をすべて挙げると $(x,y)=\boxed{8}$ である [5].

問題 C 文中の $\boxed{1}$〜$\boxed{6}$ に最もよく充てはまる数・式・記号（問題冒頭の定理の記号，文中下線の記号）を入れなさい． [30 点]

次の定理を証明しよう：

> 数列 $\{a_n\}$ に対して，極限値 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\alpha$ が存在し，かつ $\alpha<1$ が成り立つならば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ は収束する．

証明： 仮定より $\boxed{1}>0$ なので，$\sqrt[n]{|a_n|}$ の極限値が α であることから，
$_{\mathbf{a}}$<u>次のような番号 N が存在する</u>：$n\geqq N$ を満たす任意の n に対し

$$(*) \qquad \left|\sqrt[n]{|a_n|}-\alpha\right|<\boxed{1}.$$

式 $(*)$ は $\alpha-\boxed{1}<\sqrt[n]{|a_n|}<\alpha+\boxed{1}$ と書き換えられるから，$n\geqq N$ をみたす任意の n に対して

$$\sqrt[n]{|a_n|}<r \qquad ただし \qquad r:=\boxed{2}$$

$_{\mathbf{b}}$<u>が成り立つ</u>．ここで，$0<r<1$ なので，定理 $\boxed{3}$ より $_{\mathbf{c}}$<u>級数 $\sum r^n$ は収束</u>する．したがって 定理 $\boxed{4}$ より $_{\mathbf{d}}$<u>$\sum|a_n|$ は収束</u>する，さらに，定理 $\boxed{5}$ から $_{\mathbf{e}}$<u>級数 $\sum a_n$ も収束</u>する．□
とくに，下線 **a**〜**e** をつけた部分のうち「実数の連続性」を用いている箇所を全て挙げると $\boxed{6}$ である．

類似の議論で，極限値 α が $\alpha>1$ を満たせば，級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ が発散することもわかる．

問題 D [10 点] 次の 2 つの条件をともにみたす x の冪級数が存在するならばその具体例を挙げ，それが条件を満たしていることを示しなさい．また，存在しないならばその理由を述べなさい．

(1) 収束半径は 2 である．

(2) $x=2$, $x=-2$ で絶対収束する．

問題 E [0 点] 何か言い残すことがあればお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

おつかれさまでした ♡

[4] 条件をみたす (x,y) の組は 4 組以下である．答えが 4 組未満の場合は，余った解答欄に×印を入れよ．
[5] $\boxed{7}$–$\boxed{8}$: 該当する点がない場合は，解答欄に×を入れよ．

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 配点：1–5/6/7/8–9+a/10–19/20–24/25–26/27: 各 5 点

1	2	3	4	5	6
0	1	0	$-\dfrac{1}{6}$	0	$\dfrac{x^5}{120}\cos\theta x$

7	8	9
0.564	3×10^{-4}	7×10^{-4}

下線 a の理由：

$\cos x$ は $0 \leqq x \leqq 0.6\ (\leqq \pi/4)$ で単調減少なので

$$R_5(0.6) = \frac{(0.6)^5}{120}\cos(0.6\theta) \leqq \frac{(0.6)^5}{120} = \frac{6^5}{12}\times 10^{-6} = (3\times 6^3)\times 10^{-6}$$
$$= 648\times 10^{-6} < 7\times 10^{-4}$$
$$R_5(0.6) > \frac{(0.6)^5}{120}\cos(0.6) > \frac{(0.6)^5}{120}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{6^5}{120}\frac{\sqrt{2}}{2}\times 10^{-5} = 3^2\cdot 6^2\cdot\sqrt{2}\times 10^{-6}$$
$$> 3^2\cdot 6^2\times 10^{-6} = 324\times 10^{-6} > 3\times 10^{-4}$$

10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
0	5	6	4	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$	$\times$

20	21	22	23	24	25	26	27
0	0	1	$-\dfrac{1}{2}$	3	0	-1	3

- 途中の誤った解答から正しい推論で得られたと思われる解答には得点を与えていることがあります.
- 10–19: 8–9 からの推論で得られる答を正解としています.
- 6 の $\cos\theta x$ が $\sin\theta x$ となっている方が多く見られました.
- 【満点 32 名/受験者 71 名】

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 2〕

問題 B の解答欄 配点：1/2–5/6/7–8: 各 5 点

1

$$f_x = 3x^2 - y, \quad f_y = 3y^2 - x$$

2

$$(0, 0)$$

3

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

4

×

5

×

6

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{xy} = f_{yx} = -1, \quad f_{yy} = 6y$$

7

×

8

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

問題 B

- 途中の誤った解答から正しい推論で得たと思われる解答には得点を与えていることがあります.
- 【満点 62 名/受験者 71 名】

問題 C:

- 「悪問」という意見もあったが，$\boxed{2}$ に 1 より小さい正の数が入るようになっていて，辻褄が合えばいいわけです．この文脈で意味が確定していない “ε” を用いたものは不正解.
- **a**, **b**, **c** は実数の連続性とは無関係．強いて言うならば $\sqrt[n]{|a_n|}$ の存在は実数の連続性と関連する（実際，存在の証明は中間値の定理による）が，下線部には直接かかわらない．一方 **d**, **e** はともに実数の連続性によっている．実際，数の範囲を有理数に限ると，定理 D, E は成り立たない.
- 【満点 3 名/受験者 71 名】

問題 D:

- 問題文の「2 つの条件を ともに みたす」の下線部が読み取れていないと思われる答案が複数ありました.
- 具体例をひとつ挙げ，それが条件をみたさないことから「存在しない」という結論を出している答案が複数ありました．論理としてむちゃくちゃ.
- 【満点 13 名/受験者 71 名】

	$[0, 40]$	$(40, 50]$	$(50, 60]$	$(60, 70]$	$(70, 80]$	$(80, 90]$	$(90, 100]$	合計
試験得点	0	1	4	14	29	14	9	71
評価	0	0	0	6	13	25	27	71

学籍番号			-					氏名	

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 3〕

問題 C の解答欄 配点：各 5 点

1 $\frac{1-\alpha}{2}$	2 $\frac{1+\alpha}{2}$	3 **F**	4 **H**	5 **E**	6 **d, e**

問題 D の解答欄 配点：10 点

たとえば

$$(\diamondsuit)\qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)\times 2^n} x^n$$

は条件を満たす.
実際，冒頭の定理 G から

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)(n+2)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \sqrt[n]{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}\right] = 1$$

が成り立つので，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{(n+1)(n+2)\times 2^n}\right|} = \frac{|x|}{2}\,\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)}} = \frac{|x|}{2}.$$

したがって問題 C から ($\diamondsuit$) は $|x|/2 < 1$ のとき収束（絶対収束），$|x|/2 > 1$ のとき発散する．すなわち $|x| < 2$ のとき収束 $|x| > 2$ のとき発散するので，($\diamondsuit$) の収束半径は 2 である．
ここで，$x = 2$ のとき ($\diamondsuit$) は

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+2}\right) = 1$$

となり，収束．とくにこの級数の各項はもともと正だから絶対収束．一方 $x = -2$ のときは，各項の絶対値をとった級数が $x = 2$ のときと一致するので，上で見たように収束．したがって $x = -2$ のときも絶対収束．

学籍番号			-						氏名	

微分積分学第二 B 定期試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 E への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 E [0 点]

回答欄

何か言い残すことがあればお書きください．回答の内容が成績に影響することは一切ありません．

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．

- 2015 年度入学の方は，学籍番号のうち “15_” を除いた番号の席に着席してください．
- それ以外の方は，ご自分の名前のある席に着席してください．
- **座席表に学籍番号・氏名がない方は監督者まで申し出てください**．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持込用紙・必需品（電話・時計不可）以外の物を鞄に入れ，机の下か足下に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- 解答用紙 4 枚と持ち込み用紙はすべて提出してください．5 枚揃っていない答案は採点いたしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を各列の黒板に向かって**右端**から左へ，**左端**まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最前列の席の方は，答案用紙の束を机の上におき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	