II. テイラーの定理の応用

II.1　テイラーの定理と極限

テイラーの定理 1.19 における $R_{n+1}(h)$ を**剰余項**[1]，それ以外の部分を**主要項**という．例 1.20，問題 I-12, I-13 でみたように，ある状況では剰余項の値が十分小さいことが期待される．このことをある意味で述べたのが次である：

定理 2.1 (テイラーの定理 2)**.** 関数 $f(x)$ は a を含む開区間で C^{n+1}-級とする．このとき，次が成り立つ：

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)h^n+R_{n+1}(h) \tag{2.1}$$

とおくと　$$\lim_{h\to 0}\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}=0.$$

注意 2.2. 定理 1.19 では h は与えられた定数であったが，定理 2.1 の h は 0 に近い値をとる変数で，$h\to 0$ という極限における性質が定理の結論である．

定理 2.1 の証明. 関数 f は開区間 $I:=(a-\delta,a+\delta)$ $(\delta>0)$ で C^{n+1}-級であるとしてよい．このとき $|h|<\delta$ みたす h に対して $a+h\in I$ である．

仮定から f は I で C^{n+1}-級だから，$f^{(n+1)}$ は I 上で連続である（定義 1.18 参照）．したがって，定理 1.13 より $f^{(n+1)}$ は I に含まれる閉区間 $I':=[a-\frac{\delta}{2},a+\frac{\delta}{2}]$ 上で最大値 m_1，最小値 m_2 をとる．そこで $M:=\max\{|m_1|,|m_2|\}$ とする[2]．ここでテイラーの定理 1.19 から，各 $h\in I'$ に対して

$$R_{n+1}(h):=f(a+h)-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k=\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta_h h)$$

をみたす θ_h $(0<\theta_h<1)$ が存在する．いま $a+\theta_h h\in I'$ であるから，

$$|R_{n+1}(h)|\leqq\frac{|h^{n+1}|}{(n+1)!}M,\qquad \text{したがって}\qquad \left|\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\right|\leqq\frac{M|h|}{(n+1)!}$$

が成り立つので，

$$-\frac{M|h|}{(n+1)!}\leqq\frac{R_{n+1}(h)}{h^n}\leqq\frac{M|h|}{(n+1)!}.$$

この右辺と左辺は $h\to 0$ としたときに 0 となるから，結論が得られた．　□

[*] 2015 年 12 月 18 日/22 日
[1] 剰余：remainder；主要項：the principal terms
[2] 記号 $\max\{a,b\}$ は a と b のうち小さくない方を表す．

例 2.3. 極限値

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-a-bx}{x^2} \tag{$\star$}$$

が存在するような定数 a,b の値を求めよう．テイラーの定理 2.1 を $f(x)=e^x$, $a=0$, $h=x$, $n=2$ として適用すると

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+R_3(x),\qquad \lim_{x\to 0}\frac{R_3(x)}{x^2}=0 \tag{$\star\star$}$$

を得る．したがって

$$\frac{e^x-a-bx}{x^2}=\frac{1-a}{x^2}+\frac{1-b}{x}+\frac{1}{2}+\frac{R_3(x)}{x^2}$$

となる．この右辺の最後の項は ($\star\star$) から $x\to 0$ のとき 0 に近づくので，極限値が存在するためには

$$X:=\frac{1-a}{x^2}+\frac{1-b}{x}=\frac{1}{x^2}\big(1-a+x(1-b)\big)$$

が $x\to 0$ で収束しなければならない．いま $a\neq 1$ とすると，$|X|\to\infty$ $(x\to 0)$ となるので，極限が存在するためには $a=1$．このとき $X=(1-b)/x$ だから，これが収束するためには $b=1$ でなければならない．以上から，極限値 ($\star$) が存在するためには $a=b=1$ でなければならず，そのとき

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}+\frac{R_3(x)}{x^2}\right)=\frac{1}{2}.\qquad\diamondsuit$$

■ 収束の次数とランダウの記号　剰余項の性質を表すために記号を用意する：

記号 2.4. 関数 f, g が

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0 \tag{2.2}$$

をみたすとき，

$$f(x)=o\big(g(x)\big)\qquad(x\to a) \tag{2.3}$$

と書き，o を**ランダウの（小文字の） o 記号**[3][4]という．とくに $g(x)\to 0$ $(x\to a)$ のとき，(2.2) は，$f(x)$ が $g(x)$ **よりもはやく 0 に近づく**ことを意味している．このとき，(2.3) を

[3] Edmund Gerorg Hermann Landau; 1877–1938, De.
[4] ランダウの記号：Landau's symbol; ランダウの記号にはもうひとつ，o と異なる意味をもつ "大文字の O 記号" がある．

$x \to a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ より速い **オーダー** [5] で 0 に近づく

と読むことがある．

また，$f(x) - g(x) = o\bigl(h(x)\bigr)$ $(x \to a)$ のとき，次のように書く：

$$f(x) = g(x) + o\bigl(h(x)\bigr) \qquad (x \to a). \tag{2.4}$$

例 2.5 (問題 II-4)**.**
- 定数関数 1 に対して $f(x) = o(1)$ $(x \to a)$ であることは $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ であることと同値である．
- 整数 m, n に対して $x^m = o(x^n)$ $(x \to 0)$ であるための必要十分条件は $m > n$ が成り立つことである．
- $\cos x = 1 + o(x)$ $(x \to 0)$. ♢

注意 2.6. 式 $f(x) = o\bigl(g(x)\bigr)$ $(x \to a)$ はあくまでも (2.2) の略記でしかなく，記号 $o\bigl(g(x)\bigr)$ 自体が特別な関数を表しているわけではない．実際，

$$x^2 = o(x), \qquad x^3 = o(x) \qquad (x \to 0)$$

は正しい式だが，これらを引き算して得られる "$x^2 - x^3 = 0$" は正しくない．

ランダウの記号を用いると，定理 2.1 は次のように書き換えられる：

系 2.7. 関数 $f(x)$ が a を含む開区間で C^{n+1}-級であるとき，

$$f(a+h) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) h^k\right) + o(h^n) \qquad (h \to 0). \tag{2.5}$$

■ テイラーの定理の別証明と積分型剰余項 剰余項の表し方にはさまざまなものがあるが，ここではもうひとつの表示を紹介しておく：

定理 2.8 (テイラーの定理 3)**.** 関数 f が a を含む開区間 I で $n+1$ 回微分可能ならば，$a + h \in I$ となる h に対して，テイラーの定理 1.19 の剰余項 $R_{n+1}(h)$ は次のように表される：

$$R_{n+1}(h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}\bigl(a + uh\bigr)\, du. \tag{2.6}$$

[5] オーダー（次数）: order

証明. $x = a + h$ とおいて，微積分の基本定理と部分積分の公式を用いると，

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x (t-x)' f'(t)\,dt \\
&= \bigl[(t-x)f'(t)\bigr]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x (t-x) f''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) - \int_a^x \left(\frac{1}{2}(t-x)^2\right)' f''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) - \left[\frac{(t-x)^2}{2} f''(t)\right]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(t-x)^2}{2} f'''(t)\,dt \\
&= f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \left(\frac{(t-x)^3}{6}\right)' f'''(t)\,dt \\
&= \dots \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k\right) + \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt.
\end{aligned}$$

ここで，$t = (1-u)a + ux$ とおいて置換積分を行うと，

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(h) :&= \frac{(-1)^n}{n!} \int_a^x (t-x)^n f^{(n+1)}(t)\,dt \\
&= \frac{(x-a)^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}\bigl((1-u)a + ux\bigr)\,du
\end{aligned}$$ □

II.2 テイラー級数

■ テイラーの定理の剰余項の挙動 定理 2.1 は，テイラーの定理の剰余項の $h \to 0$ としたときの挙動であった．次に，h を固定し，n を大きくしたときの剰余項のふるまいを調べよう．

例 2.9. 関数 $f(x) = e^x$ に対して $a = 0$, $h = x$, n を正の整数として，テイラーの定理 1.19 を適用すると

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{2.7}$$
$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^{\theta_n x} x^{n+1} \qquad (0 < \theta_n < 1)$$

をみたす θ_n が存在することがわかる．ここで f は単調増加関数（問題 II-5）であるから，$0<\theta_n<1$ であることに注意すれば

$$e^{\theta_n x} \leqq \begin{cases} e^x & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ 1 & (x<0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成り立つ．とくに $x<0$ のとき $1<e^{-x}=e^{|x|}$ だから，各実数 x に対して

$$|R_{n+1}(x)| \leqq e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

したがって，節末の補題 2.21 から，任意に与えられた実数 x に対して，

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$$

が成り立つ．とくに (2.7) で $n\to\infty$ とすれば，任意の実数 x に対して等式

$$e^x = 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k \tag{2.8}$$

が成り立つことがわかる． ♢

例 2.10 (問題 II-6)**.** 任意の実数 x に対して

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}, \tag{2.9}$$

$$\sin x = x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}. \tag{2.10}$$

♢

例 2.11. 関数 $f(x)=\log(1+x)$ $(-1<x\leqq 1)$ に対して，テイラーの定理 1.19 を $a=0$, $h=x$ として適用する．正の整数 k に対して $f^{(k)}(x)=\frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ であることに注意すれば，テイラーの定理 1.19 から

$$\log(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+R_{n+1},$$
$$R_{n+1}=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}} \qquad (0<\theta<1)$$

をみたす θ が存在することがわかる．もし $0\leqq x\leqq 1$ ならば

$$|R_{n+1}| \leqq \frac{|x|^{n+1}}{n+1} \leqq \frac{1}{n+1} \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{2.11}$$

一方，$-1<x<0$ のときは，定理 2.8 の形の剰余項を用いれば，$h:=-x$ $(0<h<1)$ とおいて

$$|R_{n+1}| \leqq |x|^{n+1}\left|\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{(1+ux)^{n+1}}\,du\right| = h^{n+1}\int_0^1\frac{(1-u)^n}{(1-uh)^{n+1}}\,du$$
$$= h^{n+1}\int_0^1\left(\frac{1-u}{1-uh}\right)^n\frac{du}{1-uh} = h^{n+1}\int_0^1\frac{s^n}{1-hs}\,ds.$$

ここで，最後の等式は変数変換 $s=(1-u)/(1-uh)$ による．区間 $0\leqq s\leqq 1$ で $1-hs \geqq 1-h$ だから， $0<h<1$ に注意すれば

$$\begin{aligned} |R_{n+1}| &\leqq h^{n+1}\int_0^1\frac{s^n}{1-h}\,ds \\ &= \frac{h^{n+1}}{(n+1)(1-h)} \leqq \frac{1}{(n+1)(1-h)} \to 0 \qquad (n\to\infty) \end{aligned} \tag{2.12}$$

となる． したがって，(2.11) と (2.12) から，

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \quad (-1<x\leqq 1) \tag{2.13}$$

が成り立つ．等式 (2.13) の左辺は $x>-1$ をみたす任意の x に対して定義されるが，$x>1$ となる x に対して右辺の級数は意味をもたない． ♢

■ **テイラー展開** 関数 f が a を含む開区間で C^∞-級（定義 1.18）であるとき，(1.2) で $R_n(h)$ を定義したとき，ある区間 I のすべての h に対して $\lim_{n\to\infty}R_n(h)=0$ が成り立つならば，各 $h\in I$ に対して

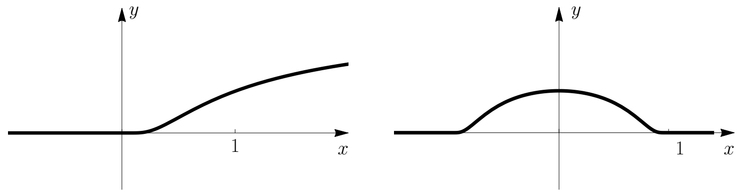
$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)h^k \tag{2.14}$$

が成り立つ．これを f の a のまわりの**テイラー展開**[6] という．とくに (2.14) で $a=0$ の場合を**マクローリン展開**[7] という[8]．

[6] テイラー展開：the Taylor expansion.

[7] マクローリン展開：the Maclaurin expansion; Colin Maclaurin (1698–1746, Scotland).

[8] 「テイラーの定理」と「テイラー展開」は区別すること．テイラーの定理 1.19 は $f(a+h)$ を h の有限次の多項式で近似したときの誤差を表現する定理である．一方，テイラー展開は，$f(a+h)$ を無限級数で「正確に」表すものである．



$y = e^{-1/x}$ $(x > 0)$; 0 $(x \leqq 0)$　　$y = e^{1/(x^2-1)}$ $(|x| < 1)$; 0 $(|x| \geqq 1)$

図 2.1　例 2.13.

■ **解析関数**　式 (2.8), (2.9), (2.10), (2.13) はそれぞれ e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\log(1+x)$ の 0 の回りのテイラー展開（マクローリン展開）を与えている．

定義 2.12. 点 a を含む区間で C^∞-級な関数 f が a を含む開区間 I で (2.14) のような形で表される，すなわちテイラー展開可能であるとき，f は a で**解析的**（正確には実解析的）とよばれる [9]．とくに f が定義域の各点で実解析的であるとき f は単に実解析的，または**解析関数**という．実解析的であることを "C^ω-級" ということがある [10]．

定義から解析関数は C^∞-級であるが，逆は一般に成立しない．

例 2.13. 実数全体で定義された関数 f を

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

と定める このとき，補題 2.22 から

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to+0} \frac{e^{-1/h}}{h} = \lim_{u\to+\infty} ue^{-u} = 0,$$
$$\lim_{h\to-0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to-0} \frac{0}{h} = 0$$

なので補題 2.23 より

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = 0$$

[9] (実) 解析的：(real) analytic; 複素変数の関数の解析性は別の形で定義されるので，区別するためは「実」をつけることが多い．

[10] 解析関数：an analytic function. C^ω-級：of class C-omega.

となる．したがって，次を得る：

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0). \end{cases}$$

ここで再び補題 2.22 から f' は 0 で連続，したがって f は C^1-級関数である．

実は任意の正の整数 k に対して

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\dfrac{1}{x}\right) e^{-1/x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases} \tag{2.15}$$

と表される．ここで $P_k(t)$ は t の多項式で，帰納的に

$$P_0(t) = 1, \qquad P_{k+1}(t) = t^2\bigl(P_k(t) - P_k'(t)\bigr) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義されるものである（問題 II-9）．したがって f は C^∞-級であるが，0 で実解析的でない．実際，もし 0 で実解析的なら，十分小さい x に対して

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} 0 \times x^k = 0,$$

ところが，$x > 0$ なら x がいくら小さくても $f(x) > 0$ となり，矛盾が生じる．

同様に次の関数も C^∞-級であるが，± 1 で解析的でない（図 2.1 右）：

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & (|x| < 1) \\ 0 & (|x| \geqq 1) \end{cases} \qquad \diamondsuit$$

■ **一般化された二項定理**

定義 2.14. 実数 α と負でない整数 k に対して

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k > 0), \qquad \binom{\alpha}{0} = 1$$

と定め，これを**二項係数** [11] とよぶ．

[11] 二項係数：the binomial coefficient

例 2.15 (問題 II-8)**.**

$$\binom{-1}{0}=1,\quad \binom{-1}{1}=-1,\quad \binom{-1}{2}=1,\quad \dots,\quad \binom{-1}{k}=(-1)^k.$$
$$\binom{\frac12}{0}=1,\quad \binom{\frac12}{1}=\frac12,\quad \binom{\frac12}{2}=-\frac18,\quad \binom{\frac12}{3}=\frac1{16},\quad \dots. \qquad \diamondsuit$$

注意 2.16. 正の整数 n に対して，$\binom{n}{k}$ は「n 個から k 個を選ぶ組み合わせの数 [12]」である．とくに $k>n$ ならば $\binom{n}{k}=0$.

補題 2.17. 任意の実数 α と正の整数 k に対して次が成り立つ：

$$\binom{\alpha+1}{k}=\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k}.$$

証明. 右辺を変形して左辺を導く：

$$\begin{aligned}\binom{\alpha}{k-1}+\binom{\alpha}{k}&=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{(k-1)!}+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}\\&=\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+2)}{k!}\bigl(k+(\alpha-k+1)\bigr)\\&=\frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-k+1)}{k!}=\binom{\alpha+1}{k}.\end{aligned}\qquad\square$$

補題 2.18. 任意の実数 α と正の整数 n に対して

$$(1+x)^\alpha=\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}x+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)\qquad(x\to0)$$

が成り立つ．ただし $o(\cdot)$ はランダウの記号 2.4 である．

証明. 関数 $f(x)=(1+x)^\alpha$ を微分すれば

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

となるので，テイラーの定理の系 2.7 から結論が得られる． $\square$

[12] 高等学校の教科書では "${}_n\mathrm{C}_k$" を使うことが多いが，"$\binom{n}{k}$" の方が一般的によく使われるようである．とくに α が正の整数でないときは "${}_\alpha\mathrm{C}_k$" とは書かない．

補題 2.18 から x が十分小さい範囲では，二項定理（問題 I-10）に類似の式が近似的に成り立つ．ここで，α が正の整数でなければ，二項係数は決して 0 にならないので 問題 I-10 のような有限の項からなる等式は期待できない．

補題 2.18 の剰余項をきちんと評価すると次がわかる：

定理 2.19 (一般化された二項定理)**.** 任意の実数 α に対して次が成り立つ：

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\qquad(-1<x<1).$$

例 2.20.

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1}{k}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kx^k\qquad(-1<x<1).\qquad\diamondsuit$$

II.3 いくつかの補題

この節の議論で用いたいくつかの事実をまとめておく．

補題 2.21. 任意の正の実数 x に対して $\lim_{n\to\infty}(x^n/n!)=0$ が成り立つ.

証明. 正の実数 x に対して $N-1<x\leqq N$ をみたす正の整数 N が存在する．番号 n が $n>N$ をみたしているとき，

$$\begin{aligned}0\leqq\frac{x^n}{n!}&=\frac{x^N}{N!}\frac{x^{n-N}}{n(n-1)\dots(N+1)}\leqq\frac{x^N}{N!}\frac{N^{n-N}}{(N+1)^{n-N}}\\&=\frac{x^N}{N!}\left(\frac{N+1}{N}\right)^N\left(\frac{N}{N+1}\right)^n=C\left(\frac{N}{N+1}\right)^n\qquad\left(C:=\frac{x^N}{N!}\left(\frac{N+1}{N}\right)^N\right)\end{aligned}$$

となる．$0<N/(N+1)<1$ なので $n\to\infty$ としたとき上の式の右辺は 0 に近づくので，結論が得られる． $\square$

補題 2.22. 任意の多項式 $P(x)$ に対して，次が成り立つ：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{P(x)}{e^x}=0.$$

証明. 多項式 $P(x)$ の次数を N とする．このとき，テイラーの定理 1.19 を $f(x)=e^x$, $a=0$, $h=x>0$, $n=N+1$ として適用すると，

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1} + \frac{e^{\theta x}}{(N+2)!}x^{N+2} \geqq \frac{1}{(N+1)!}x^{N+1}.$$

ただし θ は $0<\theta<1$ をみたす数である．とくに

$$P(x) = p_N x^N + p_{N-1}x^{N-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \qquad (p_N \neq 0)$$

と書けば，$x>0$ のときに

$$\left|\frac{P(x)}{e^x}\right| \leqq \frac{(N+1)!|P(x)|}{x^{N+1}} = \frac{(N+1)!}{x}\left|p_N + \frac{p_{N-1}}{x} + \cdots + \frac{p_0}{x^N}\right| \to 0 \ (x \to +\infty)$$

となり，結論が得られた． □

補題 2.23. 点 a を含む開区間 I から a を除いた集合 $I\setminus\{a\} = \{x \in I \mid x \neq a\}$ で定義された関数 f が $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$, $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ をみたしているならば，$\lim_{x\to a} f(x) = A$ である．

問　　題　　II

II-1 関数 $f(x)$ は x の n 次多項式で与えられているとする．このとき，

(1) 次が成り立つことを示しなさい：

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k. \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x^2 - x + 4$ とするとき $f(\sqrt{2}+2)$，$f(2.1)$ をそれぞれ求めなさい．
（ヒント：前の問いの式を $a=2$, $a=1$ の場合に書く.）

II-2 テイラーの定理を用いて次の極限値を求めなさい：

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\tan x - 3x - x^3}{x^5}$.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x) - 2x + x^2}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^3}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{\tan^3 x}$.

II-3 次の極限値が存在するように，定数 a, b の値を定めなさい：

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x - a\sin x + bx}{x^5}.$$

II-4 例 2.5 を確かめなさい.

II-5 自然対数の底 e が無理数であることを，以下のように示しなさい.

(1) 関数 $f(x)=e^x$ は実数全体で単調増加であることを示しなさい.

(2) 前回のテイラーの定理 1.19 を $f(x)=e^x$, $a=0$, $h=1$, $n=2$ に対して適用し，$e^\theta < e$ $(0<\theta<1)$ であることを用いて $2.6 < e < 3$ であることを示しなさい.

(3) 以下，e は有理数であると仮定して矛盾を導く．$e = m/n$ (m, n は正の整数) とおくと $n \geqq 2$ であることを確かめなさい.

(4) テイラーの定理 1.19 を $f(x)=e^x$,$a=0$, $h=1$ として，前の問いの n に対して適用した式を書きなさい.

(5) 前の問いの式の両辺に $n!$ をかけた等式は，テイラーの定理の剰余項に対応する項以外はすべて整数の項からなることを確かめなさい.

(6) 前の問いで得られた等式の，剰余項に対応する項は整数にならないことを示しなさい．これは矛盾なので，背理法が完成した.

II-6 式 (2.9), (2.10) を示しなさい.（ヒント：$|\cos X| \leqq 1$, $|\sin X| \leqq 1$ を用いる.）

II-7 双曲線関数 $\cosh x$, $\sinh x$ の $x=0$ を中心とするテイラー展開を求めなさい.

II-8 例 2.15 を確かめなさい.

II-9 例 2.13 の式 (2.15) を示しなさい.（ヒント：数学的帰納法による.）