

2015 年 10 月 19 日 (2015 年 10 月 26 日訂正)

山田光太郎

kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 2

お知らせ

- 講義概要と提出用紙で、提出物の締め切り時刻が違っていました。申し訳ありません。今後はとくに断りのない限り講義の翌日火曜日の 15 時とさせていただきます。
- 東工大 OCW/OCW-i に上げた講義資料が間違っていました。20151005.pdf のつもりで 20150105.pdf をアップロードした模様です。2015 年 10 月 12 日に差し替えました。
- 提出物は返却しています。赤字のコメントが読めないかもしれません。これは、山田用のメモで、正式なコメントはこの用紙にあります。

前回の補足

- 提出物の答案に「題意」という語を使った方を見受けました。山田は「題意」という語の正確な意味を知りません。広辞苑によれば「題の意味するところ」。たとえば歌会始のお題の意味を解説する文章につけられます。数学の文脈での意味は広辞苑にはありません。山田がいままでに見た用例は「仮定」の意味で使われているものと、「結論」の意味で使われているものの両方がありました。これらの用法であれば、意味が明確な「仮定」「結論」を使うべきです。もし、「題意」という語をどうしても使いたいのであれば、その意味を（できれば根拠・用例とともに）山田に教えて下さい。
- 「講議」という語はありません。「講義」です。

授業に関する御意見

- 講義資料を OCW-i の方にも載せてもらいたいです。山田のコメント：掲載した資料が間違っていたので修正しました。
- 毎授業毎にその日に触れる内容の詳細を載せたプリントなどがあると助かります。山田のコメント：そのために、授業予定表に教科書の節番号を入れました。教科書はお買い求めいただけると嬉しいです。
- 字が所々読みにくいです。
- 所々、字が略されていて、読みづらいので、略す前に何の字を略すかを伝えて頂く（原文ママ：「頂ける」が標準では？
http://www.mext.go.jp/b_menu/hakusho/nc/k19730618001/k19730618001.html）と助かります。山田のコメント：Sorry. できればその場で指摘してください。
- 右側の黒板は左端だと見にくいと思うので、もう少し大きめに黒板書いてくれる方がいいと思う。山田のコメント：了解。工夫します。余談にしか使わないつもりですが、見づらいようでしたら席を移動して下さい。
- 右側の黒板は見えにくいので、あまり使用しないで下さい。山田のコメント：たぶん「余談」にしか使いません。
- 生先（原文ママ）の話しが面白いです。山田のコメント：それは面白い。
- 授業に関する希望が特にないのに希望を書く場所があるためになにかしら考えなければならないので、希望を書かなくても良いことにしてほしい。山田のコメント：任意で結構です。講義資料 1 の 1 ページには「ご意見等の内容は成績に一切影響しません」とありますので、ご意見が「空」であっても成績に影響しないはずですね、数学科的には。
- 配布資料についてなのですが、他の問題を解く上で指針となるような、具体例としての例題や例解をつけていただけると理解しやすかったり、問題が解きやすいと思いました。山田のコメント：具体的にはどうすればよい？次回以降の内容は教科書の問題と解答を参考にしてください。
- 余談を含めてわかりやすく面白かったです。山田のコメント：そう？
- 今のところないです。山田のコメント：me, too.

質問と回答

質問: \mathbb{R}^2 の合同変換は 3 パラメータだと仰いましたが、「行列式が +1 か -1 か」というのはパラメータとは言わないのでしょうか。

お答え: はっきりと説明はしていないのですが,ここでは「連続的に動く」量をパラメータといおうとしています。たとえば曲線のパラメータ表示など。直交変換の行列式の値は 1 と -1 しかとりませんので,この値をパラメータとは考えずに,「 \mathbb{R}^2 の合同変換全体は,3 パラメータで表されるもの 2 組からなる」と考えます。もうちょっと業界の符丁を使うと, \mathbb{R}^2 の合同変換群は 2 つの連結な 3 次元多様体になる,と言えます。もちろん,この授業では深入りしません。

質問: 向きを保つ合同変換(2 次)の中で,折り返しだけ外されましたが,私は回転も向きが変わってしまっていると思うのですが,折り返しとの違いは何ですか?

お答え: 「向き」という語を正確に定義していないので,混乱を招いているかもしれませんが「左右の関係」のことです。0 でない平面ベクトル x に対して左側を向く 0 でないベクトル y をとり,これらを直交行列 A によって変換した $\tilde{x} := Ax, \tilde{y} := Ay$ を考えます。このとき \tilde{y} が \tilde{x} に対して左向きである(このとき,変換は「向きを保つ」という)ための必要十分条件は $\det A > 0$ となること。

質問: 角の定義 $x \cdot y = |x||y| \cos \theta$ とコーシー・シュワルツの不等式 $|x \cdot y| \leq |x||y|$ の話が理解できなかったのですが,コーシー・シュワルツを $0 \leq |x - \frac{x \cdot y}{|y|^2} y|^2$ で証明した上で, $-1 \leq \cos \theta = \frac{x \cdot y}{|x||y|} \leq 1$ が成り立つので, θ が定義できるということでしょうか?

お答え: 書き方が気に食わないのですが,だいたいそう。内積の定義が何か,によりませんが,「実数をスカラーとするベクトル空間 V 上の内積とは ... を満たす写像 $V \times V \ni (x, y) \mapsto x \cdot y \in \mathbb{R}$ のことである」を定義にするとしましょう(...の部分は線形代数の教科書を見よ)。このとき,コーシー・シュワルツの不等式が成立する(証明はご質問のようにすればよい)から,もし $x \neq 0, y \neq 0$ ならば

$$\theta := \cos^{-1} \frac{x \cdot y}{|x||y|}$$

で x, y を定義することができる(\cos^{-1} の定義域は $[-1, 1]$ であることに注意)。

質問: 合同変換と等長変換は全く同じものですか?(合同) \Rightarrow (等長) は多分わかりますが(等長) \Rightarrow (合同) があるか良くわからなかったの。

お答え: ここでは同じ意味で用います(講義資料 1, 定義 1.6)。ご質問の「合同変換」はひょっとして別の意味ですか? もし(1)「等長変換」とは 2 点間の距離を保つ変換,(2)「合同変換」は $x \mapsto Ax + b$ (A は直交行列で b は定ベクトル)の形の変換と考えておられるのであれば,「(合同) \Rightarrow (等長)」は直交行列の性質から自明。「(等長) \Rightarrow (合同)」は問題 1-3。

質問: 等長変換は,今回の授業で使った以外の距離関数についても,常に存在しますか?

お答え: まず,定義はできますね。距離空間 (X, d) の等長変換とは,写像 $F: X \rightarrow X$ で,任意の $p, q \in X$ に対して $d(F(p), F(q)) = d(p, q)$ を満たすものです。集合 X 上の恒等変換は等長変換ですから,もちろん存在します。

質問: 本日の授業において合同変換を扱いましたが,幾何学において他にどのような変換が議論の対象となるのでしょうか。

お答え: 授業では「相似変換」をあげましたよね。「幾何学において」などと大上段にかがられるとたくさんありますが,この授業の教科書で扱ってるものでは「メビウス変換」 (§4)。

質問: 今回提出する問 1-1 について,点 P と点 Q がある直線 l に関して対して(原文ママ)対称である事をもっと上手く表現する方法はありますか?

お答え: $\vec{PQ} \perp l$, 線分 PQ の中点は l 上。

質問: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の合同変換のパラメーターの個数についてももう少し詳しく教えて下さい。

お答え: 講義で説明した以上のことはないのですが,どのへんまでわかっていて,どのへんを詳しく聞きたいのか言葉にしていただけませんか?

質問: $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ の固有値が ± 1 であると先生は簡単に計算してらっしゃいましたが,具体的にはどんな計算をしたのですか?

お答え: トレースが 0, 行列式が -1 なので,固有多項式は $t^2 - 1$ 。

質問： 講義内（原文ママ）で $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$ とおいていましたが, R, S は何かの頭文字でしょうか.

お答え： Rotation, symmetry です. S については, 折り返し reflection が R と重なるので. ところで「講義」という語はありません. 「講義」です.

質問： なめらかと微分可能性をやった時におもったのですが, なぜ「なめらか」という言い方をするのですか (それこそ「折れ曲がっていない」でも「すべらか」でもいいと思うのだが). それに該当する英語があるのだろうか...

お答え： smooth. 広辞苑によると「すべらか」は「なめらか」と同義のようですね. 数学では「すべらか」とは言わないようですが.

質問： なめらかさを定義するメリットはなんですか.

お答え： 堂々と「なめらか」ということができる.

質問： 現代の幾何学はエアランゲン・プログラムの指導原理にどれくらい依拠していますか? 別の, またはより一般化された, 有力な方針は登場していますか?

お答え： この授業で扱う題材 (曲面の微分幾何学) の先にあるリーマン幾何学は厳密にはこの原理に従っていないかも知れませんが. Erlangen Programme は「幾何学」に対する一つの「捉え方」の言葉を与えた, という意味がありますが, あまり教条的に考えるべきではないと思います.

質問： 数学を3つの分野に分けて, 代数・幾何・解析としていましたが, 例えば確率論はどういうポジションなのでしょうか. インセンティブとして幾何と確率の関係性などありましたら知りたいです.

お答え： 確率論は「解析学」に入ります. 幾何学との関係も深いものがあり, 近年さらに関係が強くなっているように思います. 山田はそのへんと遠いところにいるのですが, <http://sci.kj.yamagata-u.ac.jp/~ishiwata/PG2014/> のような研究会が比較的頻繁に開かれています.

質問： 授業で使われた $x^{\frac{1}{3}}$ と $\sqrt[3]{x}$ の意味の違いは一般的なものですか?

お答え： 一般的には結構いい加減に使われていることもあります. 高等学校の教科書では区別しているようですが.

質問： この『授業内容に関する質問/授業内容の誤りの指摘』欄や, 下の『この授業に関する希望など』欄の点数は, 通常的答案の点数とは別に加算されますか. それとも, 基本的に通常的答案のみで算出し, ボーナス点として付け加えられますか.

お答え： 「通常的答案」とは何を指していますか? 定期試験の答案でしょうか. この扱いは講義資料 1, 1 ページ目の最後のパラグラフに書いてある通りです.

質問： テストや提出物に「 \forall 」や「 \exists 」のような量化記号は使用してよいのか.

お答え： とくに排除はしませんが, 論理をとくに題材としていない通常の数学の文章では使わないのが慣例だと思います. 自分用のメモや黒板などで使うのに留めるのがよいのではないのでしょうか.

質問： 授業は教科書に沿ってすすめるのか.

お答え： 概ねそのとおり.

質問： 提出物に関してですが, 自分が解答した問題以外の解説はもらえるのでしょうか.

お答え： 書いたものは用意しません. 提出された答案を見て, 共通の問題点などがありましたら講義時間にコメントします. なるべく問題の選択が多様だとよいですね. クラスで分担するのもよいかも知れませんが.

質問： 問題の解答への配点より, 授業への質問の配点の方が高い理由が知りたいです. ちなみに自分はこのシステムを面白いと思いますし, 学生の意見を聞いてくださるのは嬉しいです.

お答え： よい質問を思いつき, それを的確に文章で表現するのは, 問題を解くより難しいと思っているからです.

質問： 講義資料の誤りの指摘として, 問 1.1 の 3 つ目の「正規直交基」は「正規直交基底」であると思います.

お答え： “an orthonormal basis” の訳語としては, どちらも使います. 一つの文脈の中で混用するのは避けるべきですが.

質問： 質問が浮かばない... お答え： むりやりでっち上げる.

2 平面曲線の表示

復習 (陰関数定理)

定理 2.1 (逆関数定理, 教科書 199 ページ, 定理 A-1.5 の前半). 点 a を含む数直線の区間上で定義された C^∞ 級関数 $f(x)$ が $\dot{f}(x) \neq 0$ をみたすならば, $f(a)$ を含む区間で定義された C^∞ -級関数 $g(y)$ で $g(f(x)) = x$, $f(g(y)) = y$ をみたすものがただ 1 つ存在する. さらに, g の導関数 \dot{g} は

$$\dot{g}(y) = \frac{1}{\dot{f}(g(y))}$$

をみたす.

定理 2.2 (陰関数定理, 教科書 200 ページ, 定理 A-1.6 の特別な場合). 領域 $U \subset \mathbb{R}^2$ から \mathbb{R} への可微分写像

$$F: U \ni (x, y) \mapsto F(x, y) \in \mathbb{R}$$

と $(x_0, y_0) \in U$ が

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

を満たしているとき, (x_0, y_0) の近傍 V と x_0 を含む \mathbb{R} の区間 I と, その区間 I 上で定義された可微分関数 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して, $V \cap \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in I\}$ が成り立つ. とくに $F(x, f(x)) = 0$ が成り立つ.

さらに $f(x)$ の導関数 $\dot{f}(x)$ は

$$\dot{f}(x) = - \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) / \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$$

をみたす.

注: テキスト 200 ページに誤植あり. 正誤表参照.

陰関数表示

- 「曲線 $F(x, y) = 0$ 」という文の意味.
- 曲線 $F(x, y) = 0$ が, 点 (x_0, y_0) のまわりでなめらかな曲線になるための十分条件 (テキスト 4 ページ)
- 陰関数表示の特異点 (テキスト 4 ページ)
- 関数のグラフは陰関数表示とみなせること (テキスト 3 ページ)

パラメータ表示

- パラメータ表示 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ (テキスト 4 ページ)
- パラメータ表示の正則性と特異点 (テキスト 6 ページ)
- 自己交叉: パラメータ表示では特異点でない場合がある (テキスト 6 ページ)
- パラメータ変換 (テキスト 5 ページ)

- 関数のグラフはパラメータ表示とみなせること (テキスト 4 ページ)
- 極座標表示された曲線 (テキスト 8 ページ)

弧長

- 曲線の長さの定義 (テキスト 7 ページ, 問題 2-5 参照)
- 弧長の不変性 (テキスト 9 ページの問題 2)

例

- 楕円 (テキスト例 1.1, 例 1.3 の最初の例)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

ただし $a > 0, b > 0$.

- レムニスケート (テキスト例 1.1, 例 1.3 の 3 番目の例の $a = 1$ の場合)

$$(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{\cos t}{1 + \sin^2 t}, \frac{\cos t \sin t}{1 + \sin^2 t} \right) \quad (-\pi < t \leq \pi)$$

$$r^2 = \cos 2\theta.$$

問題 1-4 (Cassinian oval カッシニの橙線と呼ばれる) の $a = c$ ($a = 1$) の場合.

- 標準的な 3/2-カスプ (テキスト付録 B-8)

$$x^3 - y^2 = 0$$

$$\gamma(t) = (t^2, t^3)$$

問題

- 2-1 原点をひとつの焦点にもち、もうひとつの焦点が x 軸の負の部分にあるような楕円は、極座標 (r, θ) を用いて $r = \frac{a}{1 + \varepsilon \cos \theta}$ と表示されることを示しなさい。ただし $\varepsilon \in [0, 1)$ は離心率、 a は正の定数である。 $\varepsilon = 1, \varepsilon > 1$ の場合にこの式は何を表すか。
- 2-2 次のような xy 平面上の曲線のパラメータ表示を求めなさい：曲線上の点 P において曲線に引いた接線と y 軸との交点を $Q = (0, t)$ とするとき線分 PQ の長さが一定 a で、かつその曲線は点 $(a, 0)$ を通る。ただし、パラメータは Q の y 座標 t を用いなさい。
- 2-3 xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を、 x 軸上に滑らないように転がすとき、放物線の焦点はどのような曲線を描くか。
- 2-4 正の整数 m を用いて極座標表示された曲線 $r = \cos m\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) を図示し、それと同じ長さをもつ楕円を求めなさい。
- 2-5 区間 $I = [a, b]$ 上で定義された C^∞ -級関数 f のグラフを C とする： $C = \{(x, f(x)) | x \in I\}$ 。 I の任意の分割 $\Delta : a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ に対して

$$L_\Delta := \sum_{j=1}^N d(P_{j-1}, P_j) \quad \left(P_i = (x_i, f(x_i)), i = 0, 1, 2, \dots, N \right)$$

とおく。ただし、 d は \mathbb{R}^2 のユークリッド距離を表す。このとき、

$$(*) \quad \sup\{L_\Delta \mid \Delta \text{ は } I \text{ の分割}\} = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

となることを示しなさい。(ヒント：平均値の定理、積分の定義、連続関数の積分可能性。)