2015 年 10 月 26 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 3

前回までの訂正

- 提出用紙の締め切りを訂正し忘れていました．講義の翌日 15:00 が締め切りです．
- 講義資料 1 に，教科書の正誤表のリンクを付けるのを忘れていました．
  - `http://www.math.titech.ac.jp/~kotaro/publication/surface-jp.html` （山田のページ）
  - `http://www.shokabo.co.jp/errata/1563/1563errata.pdf` （裳華房）
- 講義資料 2, 5 ページ，9 行目：$(-\pi < 0 \leqq \pi) \Rightarrow (-\pi < t \leqq \pi)$.
- 黒板に $F(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$ の微分を $F_x = 2x(x^2+y^2-1)$ と書いたそうです．$F_x = 4x(x^2+y^2-1)$ の誤りです．

授業に関する御意見

- 一日間を期限とする短時間での解答作成にはまだ慣れていません．完答に至らなかった答案でも提出してよいのでしょうか? また，手書きよりも PC 上 (TEX 上) での方が考えが纏まるのですが，解答の一部に印刷した PC 原稿を張り付けて（原文ママ：貼り付けて?）提出してもよいのでしょうか．

  山田のコメント： 前半：よいです．後半：よいです．ただドキュメントスキャナに通すときにひっかからないようにしてください（物理的な貼り付けは難しいかもしれません）提出用紙の PDF に TEX で書いた答案のイメージを貼り付けていただければ結構です．メイルによる提出も考えてはいるのですが，システムを開発する時間がありません．
- 可能ならば，この課題の提出期限を 1 日ほど延ばしてもらえませんか? もう少し考える時間が欲しいのです． **山田のコメント：** むしろ他の科目に時間を使って下さい．なるべく当日中に完結させることをおすすめします．
- 山田先生の板書は美しく，字も美しいです．たまに見づらい先生もいらっしゃるので大変です．英語等も分かりやすく書いて頂けると幸いです． **山田のコメント：** 了解．
- 板書が達筆すぎて読めないことがありました． **山田のコメント：** Sorry.
- 特に希望はありません/特になし **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 微分の表記で $\dot{x}(t)$ の様な書き方を良く見ますが，この講義ではこの書き方をおすすめしているのでしょうか．なぜこちらを使っているのか，使い分けなどあればコメントお願いします．

お答え： 教科書 12 ページの 2–3 行目．

質問： 提出した問題 2-1 ですが，提出した分（山田注：楕円の極座標表示まで）のところからどうがんばっても間に合いませんでした．もう一度解きたいので，ヒント，もしくは間違っている部分の指摘をお願いします．（1 つの焦点が原点，もう 1 つが x 軸正ならカージオイドかな，とかは思ったのですが... そこで推理がとまってしまいました．方針でもいいのでお願いします．）

お答え： カージオイドには「焦点」という概念がないのでは?「推理」する問題ではなくただの計算です．問題は ε が 1 以上になるとき，極座標表示 $r=\frac{a}{1+\varepsilon\cos\theta}$ が何を表すか，ということですね（ということは読み取れていますね）．

$$x=r\cos\theta=\frac{a\cos\theta}{1+\varepsilon\cos\theta},\qquad y=r\sin\theta=\frac{a\sin\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}$$

から θ を消去すれば，x と y の関係式，すなわち求める曲線の陰関数表示が得られます．

質問： 問題 2-2 の微分方程式を解く問題で，$x(t)$, $y(t)$ を求められたのですが，かなり時間がかかってしまいました．微分方程式を勉強する上でおすすめの教科書がありましたら是非教えていただきたいです．

お答え： 実は，この問題はグラフ $y=f(x)$ と表示すると微分方程式ではなく単なる積分の問題になります：

$$y'=\frac{-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\qquad なので\qquad y=-\sqrt{a^2-x^2}+a\log\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}.$$

このとき $t=y-xy'$ となるので，これを x について解けば求める式を得ます．ちなみに，微分方程式の教科書はたくさんあります．いわゆる解き方（求積法といいます）と理論の部分のどちらに重点をおいているかによって随分見かけが違います．身近なところでは 柳田・栄「常微分方程式論」（朝倉書店）はいかがでしょう．

質問： 曲線の表示方法として，陽関数による表示，陰関数表示，パラメータ表示以外に何かあるのでしょうか．

お答え： 問題 2-2 のような「説明」も曲線の表示ですよね．「平面上の異なる 2 点 F_1, F_2 からの距離の和が l であるような点の集合」も曲線の表示ですね．

質問： $r^2=\cos 2\theta$, $r=\cos m\theta$ などは r が負になる場合があるので，θ に制限をつけるべきではないでしょうか．

お答え： 「グラフ表示」と思うとそうかもしれませんが，$r^2=\cos m\theta$ をみたす (r,θ) 全体，という陰関数表示と思えば，制限が自動的につきます．

質問： 曲線 $\gamma(t)$ からパラメータ変換 $t=t(s)$ により $\tilde{\gamma}(s)=\gamma\bigl(t(s)\bigr)$ を得るとき，$\frac{dt}{ds}>0$ という条件をつけましたが，$\frac{dt}{ds}<0$ の場合を含めないのはなぜですか．図形としては同じ曲線を表しますし，弧長も変わらないので含めても良いように思います．

質問： 授業のさいごの Remma (原文ママ) で $dt/du>0$ としていましたが，パラメータによって変換の向きが変わらないようにするためでしょうか？講義中に説明をいただいていたらすみません．

お答え： 今回，曲率を定義しますが，その定義は（都合により）進行方向に依存します．たとえば，半径 1 の反時計回りの円は曲率 1，時計回りなら -1 とします．このように「進行方向」に依存する量を考えたいので，進行方向を逆転させるようなパラメータ変換はここでは考えなかったのです．

質問： 1 つの曲線に対して表せるパラメータ表示はすごいものだと何種類くらいあるのか．（例えば円だったら $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$ の他に $(x,y)=\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\frac{2t}{1+t^2}\right)$ というパラメータ表示が可能だが，他にも違う形のパラメータ表示があるのかということ．）

お答え： 曲線のパラメータ表示 $\gamma(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ が与えられたとき，区間 $[p,q]$ で定義された単調増加関数 $\varphi(u)$ で $\varphi(p)=a$, $\varphi(q)=b$ となるものをとれば，$\tilde{\gamma}(u)=\gamma\bigl(\varphi(u)\bigr)$ $(p\leqq u\leqq q)$ は同じ曲線のパラメータ表示．すなわち，単調増加関数の個数くらいある（ということを講義で述べた）．

質問： $F_1(x,y)=(x^2+y^2-1)^2$, $F_2(x,y)=x^2+y^2-1$ としたとき，$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F_1(x,y)=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,F_2(x,y)=0\}$ ですが，講義でやったように F_1，F_2 の特異点は異なります．このようなとき F_1, F_2 は同じ曲線といってよいのでしょうか?

お答え： F_1，F_2 は曲線ではありませんね．ご質問の集合の等式にあるように「$F_1=0$, $F_2=0$ は同じ曲線を表す」の

です．この場合の特異点であるということは「曲線の陰関数表示の性質」であって「曲線自体の性質」ではないことに注意しましょう．

質問： 特異点の「みつけかた」は図にかいてみるよりも良い方法はありますか?

お答え： 図に書いて特異点を見つける，なんていう説明はしましたっけ．パラメータ表示の特異点，陰関数表示の特異点の定義はなんでしたっけ．

質問： パラメータ表示の特異点 $\Rightarrow$ 陰関数表示の特異点は成り立ちますか?

お答え： パラメータ表示も陰関数表示も与えられた曲線に対して唯一ではありません．また，パラメータ表示（陰関数表示）のしかたによって「特異点である」という性質は変わります．たとえば $\gamma(s)=(s,0)$，$\tilde{\gamma}(u)=(u^3,0)$ はともに x 軸のパラメータ表示ですが，$\gamma(s)$ は特異点をもたず，$\tilde{\gamma}(u)$ は 0 に特異点をもちます．このような状況ですから，ご質問自体が意味をなしません．

質問： 特異点に関して「やばい」や「変なこと」という表現の正確な意味を教えてください．逆に分かりづらくなっているようななっていないような...

お答え： 「なめらかな曲線」に見えないこともあるし，見えることもある．特異点における曲線の形状はさまざまであって，この講義の範囲を超えるので「やばい」とだけいっておく，と述べましたよね．

質問： 特異点でおこるやばいこととは具体的にはどういうことがあるのでしょうか．

お答え： 「なめらかな曲線」に見えないことがある（ということを講義で述べた）．

質問： 今回扱ったレムニスケート等の有名な曲線はどのように発見されたのでしょうか．

お答え： ご質問に「等」とあるので回答不能．ちなみにレムニスケートは異なる 2 点からの積が一定である曲線（カッシニの卵形線 Cassinian oval；問題 1-4）の特別な場合．Bernoulli による発見らしい．

質問： レムニスケートなどのパラメータ表示は覚えた方が良いのでしょうか． **お答え：** どうでもよいです．

質問： 特にないです． **お答え：** me, too.

3 弧長パラメータと曲率 (教科書 §2)

■弧長パラメータ表示

- 速さが 1 になるパラメータを弧長パラメータという（12 ページ）

■曲率・曲率円

- 曲率の定義（13 ページ (2.5) 式），計算法（13 ページ (2.6) 式；弧長パラメータ，14 ページ (2.7) 式；一般のパラメータ）．
- 曲率のパラメータ変換による不変性：定義から直接わかる．
- 曲率の回転・平行移動による不変性：(21 ページ 系 2.7)．
- 曲率円（15 ページ），これが「曲線をもっともよく近似する円」であること（17 ページ，定理 2.4）

問題

3-1 懸垂線 $y = \cosh x$ に対して

(1) その弧長パラメータ表示を求めなさい．

(2) 曲率の定義から，弧長パラメータ s の関数として曲率を求めなさい．

(3) 上の結果とパラメータ変換の式を用いて曲率を x の関数で表しなさい．

(4) 一般の助変数表示に対する曲率の公式（テキスト 13 ページの式 (2.7)）を用いて懸垂線の曲率を求め，上の結果と一致することを確かめなさい．

3-2 レムニスケート

$$\left(\frac{\cos t}{1+\sin^2 t}, \frac{\sin t\cos t}{1+\sin^2 t}\right) \qquad (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

の弧長関数を $s = s(t)$ とし，弧長パラメータでの表示を $\gamma(s)$ $(0 \leqq s \leqq L = s(2\pi))$ とする．$\gamma(s)$ の曲率関数を $\kappa(s)$ とするとき積分 $\displaystyle\int_0^L \kappa(s)\,ds$ の値を（計算により）求めなさい．

3-3 陰関数 $F(x,y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ で与えられる曲線 C を考える．

(1) C 上の全ての点は，陰関数表示 F の特異点ではないことを確かめなさい．

(2) C の曲率の絶対値が最大・最小となる点とそこでの曲率の絶対値を求めなさい．

(3) 曲率の符号はどのように定めればよいか．

3-4 パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の $t = t_0$ での速度ベクトルを $\boldsymbol{e}$, 接線を l とする．もし，t_0 での γ の曲率が正（負）ならば，t_0 の近くで $\gamma(t)$ は $\boldsymbol{e}$ に向かって l の左（右）側にある．このことを示しなさい．曲率が 0 の場合はどうか．

3-5 弧長によりパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における曲率が 0 でないとする．このとき，3 点 $\gamma(s_0) = \mathrm{P}$, $\gamma(s_0 + t) = \mathrm{Q}_t$, $\gamma(s_0 - t) = \mathrm{R}_t$ を通る円 C_t は $t \to 0$ とすると s_0 における γ の曲率円になることを示しなさい．

2015 年 10 月 26 日