2015 年 11 月 2 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 4

お知らせ

- 11 月 3 日（火）が祝日のため，提出物の締め切りは **11 月 4 日（水）13:00** とさせていただきます．

前回までの訂正

- 黒板に「言葉の意味の拡長」と書いたそうです．「言葉の意味の拡張」です．

授業に関する御意見

- 提出課題について，授業の始めにコメントがあって良かったです． **山田のコメント：** でしょ．みんな早くこようね．
- 今までのような，多少の雑談を交えながらの講義は聞きやすいので，今後も同じような感じで進めていただけたら嬉しいです． **山田のコメント：** ネタ不足に悩んでいます．
- 学生の立場に寄った良い授業だと思います． **山田のコメント：** そう?
- わかりやすいし，スピードにも気をつかっていただいていてありがたい．もう少しだけ早くてもついていけそう． **山田のコメント：** ほんと?
- 弧長パラメータの定義から $\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$，曲率の定義までの一連の流れが分かりやすかったです!! **山田のコメント：** ですね
- 特になし/特にないです/特に無し **山田のコメント：** me, too

質問と回答

質問： $|\frac{d}{ds}\gamma(s)| = 1$ となることは式の上では分かるのですが，大きさが 1 となることの上手い理由というか説明がありますか．

お答え： 設定がわかりませんが，s が弧長なら，経過時間と道のりが一致するので速さは 1 なのでは?

質問： 陰関数表示された曲線の曲率はどのように定義されますか?

お答え： まずグラフ $y = f(x)$ は，x をパラメータとみなして $\gamma(x) = \bigl(x, f(x)\bigr)$ とパラメータ表示できるので，曲率は教科書の (2.7) 式を用いて

$$\kappa(x) = \frac{\ddot{f}(x)}{\sqrt{1+\dot{f}(x)^2}^3} \qquad \left(\dot{} = \frac{d}{dx}\right)$$

と書けます．ただし，進行方向を x が増える方向にとっています．陰関数 $F(x, y) = 0$ で与えられる曲線は $F_y \neq 0$ となる点の近くで $y = f(x)$ とグラフ表示でき，さらに $\dot{f}(x)$ は講義資料 1 の問 1.8 のように F の偏導関数で表されますから，曲率が計算できることになります．$F_x \neq 0$ のときは，x と y の役割を入れ替えれば同様．
注意：陰関数表示は曲線の進行方向を与えませんから，求められるのは曲率の絶対値です．

質問： 「$\boldsymbol{e}(s)$ の方向に対して左向きで直向（原文ママ：直交のことか）する単位ベクトル」を「反時計周りを正とした時 $\boldsymbol{e}(s)$ を $\frac{\pi}{2}$ 回転させたベクトル」と理解しても大丈夫ですか．

お答え： 大丈夫です．

質問： 問題 3-4 について，左（右）側という表現がありましたが，これはどのように定義すれば良いのでしょうか．

お答え： 直線 l は平面を 2 つの領域にわけるので，その一方を左側，他方を右側と決めます．決め方は次の通り：点 $\mathrm{A} := (x_0, y_0)$ を通りベクトル $\boldsymbol{e} = (\xi, \eta)$ に平行な直線 l の方程式は

$$-\eta(x - x_0) + \xi(y - y_0) = 0$$

と表されます．すると，平面は 2 つの領域

$$D_+ := \{(x,y) \mid -\eta(x-x_0)+\xi(y-y_0)>0\}, \qquad D_- := \{(x,y) \mid -\eta(x-x_0)+\xi(y-y_0)<0\}$$

と直線 l の合併集合になりますが，D_+ を l の左側と定めます．実際，$\boldsymbol{n}=(-\eta,\xi)$ は l の，$\boldsymbol{e}$ に対して左を向く単位法線ベクトルですが，$\mathrm{P}:=(x,y)\in D_+$ であることは，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ が $\boldsymbol{n}$ と鋭角をなすことと同値．これは「左側」を表していることを図を描いて納得しなさい．

質問： 特異点では曲率はどのように扱うのでしょうか．たとえばカスプでの曲率はどのように定めるのでしょうか．

お答え： 次の質問と回答参照．

質問： 単位接ベクトルや単位法線ベクトルは図形的なイメージが分かりやすいのですが，曲率のイメージは曲がっている方向とその曲がりぐあいであっていますか? またそのときある t_0 で $\kappa(t)\to\infty$ $(t\to t_0)$ となると曲線は折り返してしまってなめらかっぽくなくなるのですか?

お答え： 前半 OK ですが，そのことの「数学的な説明」が必要．今回やります．後半：たとえば $\gamma(t)=(t^2,t^3)$ とパラメータ表示される曲線は $t=0$ に（パラメータ表示の）特異点を持ちます（この特異点は 3/2 カスプと呼ばれる，教科書 248 ページ参照）が，$t\neq 0$ では正則なパラメータ表示を与えているので，教科書 14 ページの (2.7) 式を用いると曲率が計算できて

$$\kappa(t)=\frac{6}{|t|\sqrt{4+9t^2}^3}$$

となり，$t=0$ で無限大に発散します．

質問： 曲率円の半径が曲率の逆数であるというのは容易に示せるのでしょうか?

お答え： それが曲率円の定義では? (教科書 15 ページ参照．)

質問： 曲率が 0 である点では，$1/\kappa(s)$ が定義されないので曲率円は存在しない，ということでよろしいでしょうか．

お答え： このときは，接線を "曲率円" とみなします．教科書 15 ページ参照．

質問： $\int_0^L \kappa(s)\,ds$ はどのような意味をもっているのでしょうか?

質問： 3-2 は曲率の積分を計算する問題でしたが，曲率の積分はなにか意味を持つ量なのでょうか．

お答え： 教科書 §3．ここではあまり深入りしませんが．

質問： 少し前にベクトル解析の基礎の部分を独習したのですが，幾何学とかなり共通する部分がある気がします．近い分野ですか?

お答え： 微分幾何学を書きあらわす道具の 1 つです．

質問： （山田注：図があるが省略）(1) の放物線 (山田注：放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$) の $0\leqq x\leqq a$ の部分の長さと (2) の双曲線（山田注：$y=\sqrt{1+x^2}$ のグラフ）と x 軸に囲まれた（山田注：さらに直線 $x=0$, $x=a$ に囲まれた）斜線部分の面積が等しいことには何か理由がありますか．

お答え： 計算すれば等しいことが分かるというのが理由ですが．

質問： 弧長パラメータの表示は曲線ごとに唯一に定まるのでしょうか? なりそうな気がしたのですが，自信がないので．

お答え： 定数を加える（$s\mapsto s+s_0$）変換を除いて一意．教科書 12 ページ参照．

質問： 曲率は図形的にどのような特徴がありますか?

お答え： 文が変．曲率は図形ではなく関数なので，その図形的特徴はありません．「曲率は曲線のどのような図形的特徴を表していますか」あるいは「曲率の図形的な意味は何ですか」ではないでしょうか．

質問： 「3 階微分は加加速度とよぶのか」ということでしたが，変位の 3 階微分は加加速度（かかそくど）または躍度（やくど, jerk）とよぶそうです．（さらに，4, 5, 6 階微分はそれぞれ snap, crackle, pop とよぶらしいです）minimum jerk trajectory などで調べると応用が見つかります．

お答え： なるほど．Thanks.

質問： 曲率を定義するときに γ に C^∞ 級という条件を課したのはなぜですか．曲率を定義するには C^2 級までで十分だとおもいます（なめらかでないと曲線と曲率がうまく対応しないのでしょうか?）

お答え： 面倒くさいので（たとえば，空間曲線の捩率を定義するには C^3 級が必要とか，考える問題ごとに要求される微分可能性が違うので）簡単のために C^∞ 級としました．たとえば曲率関数が C^0 級なら，対応する C^2 級の曲線が存在します．

質問： 授業で $\gamma(t)=(t,\frac{1}{2}t^2)$ の弧長パラメーター $s(t)$ の逆関数は初等関数で表せないとおっしゃっていましたが，それは何かの定理から導かれたものですか?

お答え： 初等関数にならなさそう，と言ったような気がします．証明を持っているわけではありません．

質問： レムニスケートの弧長パラメータは具体的にどのような関数になりますか?
お答え： $s(t) = \int_0^t \frac{du}{\sqrt{2-\cos^2 u}}$. これは十分具体的な表示だと思いますが.
質問： 前回の $\dot{\gamma}$ と γ' の違いに関する質問に近いですが，$\tilde{\gamma}(s) = \gamma\bigl(t(s)\bigr)$ を $\gamma(S)$ と表記することに違和感を感じます．慣れるしかないのでしょうか.
お答え： もちろん，誤解が起きそうな場合はそのような略記をしてはいけませんが，いちいち区別して書くと，記号が足りなくなったりして面倒くさいので紛らわしくなければ省略します．物理学などではよく使いますね.
質問： 授業で曲率をあらわすのに κ (カッパ) を用いていましたが，曲率以外で κ を用いている印象がないのですが，他でも κ を使いますか?
お答え： いろいろあるようです．“Greek letter, kappa” でぐぐってみてください.
質問： 問題が高校数学のみで解けるとき，その解答を答案としてもよいか?
お答え： 正しければよい．いままでの大体の問題が高校数学でとけない?
質問： 前回はプリントの提出を忘れてしまい，申し訳ございます.（原文ママ）次からは絶対忘れないようにします.
お答え： 申し訳ございますんですか.
質問： 特に無し **お答え：**me, too.

4 平面曲線の曲率

■曲率関数の性質

- パラメータのとり方によらない（標準的なパラメータに変換して定義しているから).
- パラメータを s から $-s$ に変更する（曲線の向きを反転させる）と曲率は符号を変える.
- 曲線に回転と平行移動を施しても曲率は不変（教科書 21 ページ，系 2.7 ; 証明は後半）
- 曲線をある直線に関して折り返すと曲率は符号を変える（教科書 27 ページ，問題 4).
- 半径 $a > 0$ の左回り（右回り）の円の曲率は $1/a$ $(-1/a)$，直線の曲率は 0（教科書 13 ページ，例 2.1).
- 曲率円は曲線と 2 次の接触（教科書 16 ページ，定義 2.3）をする，すなわち曲線を最もよく近似する円（教科書 17 ページ，定理 2.7).
- ガウス写像と曲率.

■フルネの公式

- フルネ枠（教科書 22 ページの (2.15) 式に現れる $\mathcal{F}$）
- フルネの公式（教科書 21 ページ，式 (2.14), 22 ページ (2.15)）
- 平面曲線の基本定理

■閉曲線 （概略のみを扱う）

- 回転数（教科書 29 ページ）
- 単純閉曲線と回転数（教科書 31 ページ，定理 3.2）
- 閉曲線の正則ホモトピー類と回転数（教科書 33 ページ，定理 3.3）

2015 年 11 月 2 日

問題

4-1 s を弧長パラメータとし，曲率関数が $\kappa(s) = 1/(1+s^2)$ となるような曲線のパラメータ表示 $\gamma(s)$ を求めなさい．

4-2 s を弧長パラメータとし，曲率関数が s となるような曲線の絵を描きなさい．

4-3 パラメータ表示された曲線 $\gamma(t)$ の左向き単位法線ベクトル場を $\boldsymbol{n}(t)$ と書くとき，任意の実数 u に対して $\sigma_u(t) = \gamma(t) + u\boldsymbol{n}(t)$ であたえられる曲線 σ_u を $\gamma(t)$ の**平行曲線**とよぶ．$t = t_0$ における γ の曲率が 0 でないとき，t_0 が $\sigma_u(t)$ の特異点になるような u の値を求めなさい．

4-4 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ の曲率 $\kappa(s)$ が周期 L をもつ周期関数であるとき次の問いに答えなさい．

(1) 曲線論の基本定理を用いて，行列 $A \in \mathrm{SO}(2)$ と $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^2$ で次を満たすようなものが存在することを示しなさい：

$$\gamma(s+L) = A\gamma(s) + \boldsymbol{b} \qquad \text{が任意の } s \in \mathbb{R} \text{ に対して成り立つ.}$$

ただし，$\gamma(s)$, $\boldsymbol{b}$ は 2 次の列ベクトルとみなしている．

(2) さらに $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma'(0) = (1,0)$ とするとき，(1) の A, $\boldsymbol{b}$ を κ を用いて表しなさい．