2015 年 11 月 9 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 5

前回の補足

- 問題 4-1 の答えは，懸垂線になります．（問題 3-1 がその逆の問題でしたね）．そこまで気がついた方はお一方だけでした．

授業に関する御意見

- すでにされているかもしれませんが $\frac{1}{4}$ 板書は，書いたその**直後**に上に上げていただけると見やすいです．
  山田のコメント： 了解．ただ，そうすると「指す」のが大変なんで，その場合は上げません．
- 平面曲線が曲率によって特徴づけられることがよく理解できました． **山田のコメント：** よかったです．
- 前回の授業は進度が速く，授業についていけるよう予習・復習をしっかりします．
  山田のコメント： そう．なんか文が変だと思ったら，読点の前と後で主語が違うのね．おかしいのでこういう文は書かないようにしましょう．
- 「月曜日に課題をやり，火曜日に提出し忘れる」というのを 2 回繰り返してしまった自分の記憶力のなさに絶望しています．忙しいとは思いますが，成績に関係なく採点だけでもしていただけないでしょうか．
  山田のコメント： 今回は，大学に来るのが遅れたので受け取らせていただきましたが，一応，指定の時刻にはポストを開けると思っていて下さい．成績云々より，個別の扱いをするのが面倒だ，ということとご理解ください．
  足が悪い方は，それを補助するデバイス（杖だったり，車いすだったり）を使います．記憶力の悪い方も，それを補助するデバイスがたくさんあるので，それを利用して自分の欠陥を補う義務があると思います．
- 特にはありません．/特にありません．/特になし/特になし/特になし． **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 教科書の定理 2.8 では，$\kappa(s)$ の定義式が $[0,l]$ になっていますが，たとえば $\kappa(s)$ の定義域が $(-\infty,\infty)$ であっても定理 2.8 は成り立つのでしょうか．

お答え： 成り立ちます．証明といっても「具体的に表示する」だけですから，すぐにわかりますね．

質問： クロソイドは有界で自己交叉のない曲線に見えるのですが，弧長パラメータ表示が初等関数でかけないので示すのが難しそうです．そこで，一般に曲率関数が与えられたとき，対応する曲線が有界かどうか，自己交叉をもつかを判定する簡単な方法はありますか．

お答え： 「一般に」はありません．曲線の自己交叉性は容易に判定できないことがしばしばあります．クロソイドの場合は，教科書 49 ページ（§4 の系 4.6；この授業では扱わない予定）から自己交叉がないことが分かります．また，クロソイドの表示が

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos\frac{u^2}{2}\,du, \int_0^s \sin\frac{u^2}{2}\,du\right)$$

であることと，事実

$$\int_0^\infty \cos\frac{u^2}{2}\,du = \int_0^\infty \sin\frac{u^2}{2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

すなわち，これらの広義積分が収束する，という事実から有界性はわかります．ちなみに，この広義積分の収束は絶対収束ではないので，収束性の証明はそれほど易しくはありません．複素解析で学ぶコーシーの積分定理と，ガウス積分

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を用いると値が計算できますが，この授業ではこれ以上深入りしないことにします．

質問： 解答した問題 (4-1) とは違うのですが，4-2 の作図方法にどんなものがあるのか知りたいです．人の手で正しい作図は可能ですか?

お答え： たいていの図形は人の手で正しい作図が可能とは思えません．たとえば，正弦曲線は人の手で正しい作図ができますか? 一方，この曲線（クロソイド）はすぐ上の質問の回答にあるような具体的表示をもちますから，それからさまざまな情報を引き出すことができます．たとえば，原点をスタートしてどれくらいの距離進むと $\dot{x}=0$ となるかはすぐにわかりますね．もちろん，電子計算機を用いて座標を計算する・可視化ソフトウェアをつかう，なども可能.「どんな汚い手を使っても」とはそういうこと.

質問： $F\bigl(x,f(x)\bigr)=0$ のとき，$F_x+\dot{f}F_y=0$ としてありますが，自明なのでしょうか.

お答え： 合成関数の微分公式 (chain rule) をよく知っていれば自明．一般に，2 つの微分可能な一変数関数 $\xi(t)$, $\eta(t)$ と微分可能な 2 変数関数 $F(x,y)$ に対して，一変数関数 $\varPhi$ を $\varPhi(t):=F\bigl(\xi(t),\eta(t)\bigr)$ で定義すると，

$$\frac{d\varPhi}{dt}(t)=\frac{\partial F}{\partial x}\bigl(\xi(t),\eta(t)\bigr)\frac{d\xi(t)}{dt}+\frac{\partial F}{\partial y}\bigl(\xi(t),\eta(t)\bigr)\frac{d\eta(t)}{dt}$$

が成り立つことはご存知ですよね（ご存知でなければ許されない)．ご質問の状況は，文字を書き換えれば $\xi(t)=t$, $\eta(t)=f(t)$ で $\varPhi(t)$ が恒等的に 0 なので，ご質問の式は**自明**.

質問： 問題 4-1 を解いていて $\sin(\tan^{-1}t)$ や $\cos(\tan^{-1}t)$ が出て来たのですが, 問題 3-1 での $\cosh^2(\sinh^{-1}s)=1+s^2$ のようにこれらはシンプルな t の式で表せませんか．もし表せたら，表し方を教えていもらいたいです.

お答え： 逆三角関数の定数に加えて**高校程度の**三角関数の知識があればすぐにわかるはず.

$$\cos^2(\tan^{-1}t)=\frac{1}{1+\tan^2(\tan^{-1}t)}=\frac{1}{1+t^2},\quad \sin^2(\tan^{-1}t)=1-\cos^2(\tan^{-1}t)=1-\frac{1}{1+t^2}=\frac{t^2}{1+t^2}.$$

質問： 曲率関数が与えられた曲線の正しい描き方を教えて下さい.（苦戦しました）

お答え：「正しい描き方」で何を求めているかわかりませんが, 曲線の具体的な表示が積分を用いて書ける，というのはよいですね．そこからできるだけ情報を取り出していくということです．あるいは Octave, Matlab, Mathematica などを（計算機上で）使って描くのも良い方法ですね.

質問： $\boldsymbol{e}(s)=\bigl(\cos\theta(s),\sin\theta(s)\bigr)$ とすると，曲率 $\kappa(s)=\frac{d\theta}{ds}(s)$ となる事実はとてもイメージしやすく，すんなり理解できました．曲率の定義を $\kappa(s)=\frac{d\theta}{ds}(s)$ で定義しないのはなぜでしょうか? （平面限定だから，θ を求めるのが難しいから，とかでしょうか).

お答え： どちらも正しいと思います．$\theta(s)$ が曲線の定義域全体で定義された微分可能な関数になる，というのは自明でないと思うのです．むしろ，方向 $\theta(s)$ を $\kappa(s)$ の原始関数として定義したい感じです.

質問： 講義では $\frac{d\mathcal{F}}{ds}=\mathcal{F}\begin{pmatrix}0 & -\kappa\\ \kappa & 0\end{pmatrix}$ をフルネ方程式と呼んでいましたが，テキストと資料にはその表現はなく，代わりにこれをフルネの公式といっています．数学において公式というのは恒等式であり，方程式と違うと認識していましたが，この認識が誤っているのでしょうか，それとも講義の方が間違いなのでしょうか?

お答え： おっしゃるとおりで「フルネの公式」というのが適切だと思います.「フルネ方程式」という気持ちになるのは，曲線論の基本定理の証明と関係があります．今回（第 5 回）で少し説明します.

質問： $\gamma(s)$ もベクトルと思うのですが，$\boldsymbol{e}(s)$, $\boldsymbol{n}(s)$ と違って太字にしないのはなぜですか?

お答え： なぜでしょうね．ギリシア文字の太字のフォントがないことが多いから，というのはちょっと嘘っぽい．実は，位置ベクトルは，速度ベクトルや法線ベクトルと違って,「原点のとり方」によって変わる量です．ちょっと他のベクトルと気分が違うので，違う気分にしてみました．この「位置ベクトル」と「速度ベクトルなど」の違いを述べるキーワードは「アファイン空間」です．時間があれば説明すべきですが，どうするかは未定.

質問： この授業の課題では，$\boldsymbol{e}(t)$, $\boldsymbol{n}(t)$, $\kappa(t)$ などの記号を授業で習った定義で断り無く使用することはできますか.

お答え： 文脈依存．たいていは断った方がよい．少なくとも，求められたら「単位接ベクトル」「左向き単位法線ベクトル」「曲率」などと，言葉できちんと述べるように用意しておくこと.

質問： 今回の授業でクロソイド曲線が高速道路のカーブに用いられていると言っていましたが，他の曲線で日常生活に用いられているものはありますか.

お答え： こういう質問の回答は定形で「あなたの日常がわからないのでお答えできません」．たとえば，山田はこういう授業を日常的にやっているので，授業ででてくる曲線は日常生活に用いられています（屁理屈)．自分の日常が相手の日常と同じと考えるのは傲慢だと思います．ちなみに，授業では懸垂線と Antoni Gaudi との関係を少しだけ話しましたね.

質問： なめらかでない曲線で，曲線上の特意点（原文ママ：特異点のことか）以外の点はすべて $\gamma(s)$ を計算できますか?
お答え： ご質問の意味がわかりません．“$\gamma(s)$ を**計算する**” とはどういう意味ですか?
質問： 北大の石川剛郎 先生も質問書形式を採用しているようですが，何か関係ありますか.
お答え： 多分独立．石川先生のも面白いですね.
質問： 関数の変数が s だったり t だったりかなり紛らわしいですね.
お答え： そうですか? TPO に応じて独立変数の記号は変えるんじゃないの?
質問： 具体的な話と抽象的な話のバランスが良くてわかりやすいです.
お答え： 一般に「具体的な話は難しい」のは大丈夫ですね.
質問： いつも思うのですが,「特に無し」と書く学生がいるのですか.
お答え： ↓
質問： 特にないです．とても分かりやすかったです． **お答え：**騙されているのかも知れません.
質問： 30 分ほど考えて聞きたいことが浮かばなかった． **お答え：**残念.
質問： 特になし/特にないです! **お答え：**me, too.

5 空間曲線

■閉曲線 （前回の積み残し；概略のみを扱う）

- 回転数（教科書 29 ページ）
- 単純閉曲線と回転数（教科書 31 ページ，定理 3.2）
- 閉曲線の正則ホモトピー類と回転数（教科書 33 ページ，定理 3.3）

■準備：外積

- 基底の正負（教科書 204 ページ）
- 外積（教科書 207 ページ）

■空間曲線の曲率と捩率

- 弧長によってパラメータ付けられた曲線（教科書 51 ページ）
- 単位接ベクトル $\boldsymbol{e}$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}$, 曲率 κ, 捩率 τ （教科書 51–52 ページ）
- フルネ・セレの公式（教科書 54 ページ）

■空間曲線の基本定理

- 線形常微分方程式の基本定理（この資料，教科書 202 ページの定理 A-2.2）
- 空間曲線の基本定理

■曲率・捩率の図形的な意味

- 平面曲線となるための必要十分条件/ブーケの公式.

2015 年 11 月 9 日

■今回用いる事実　以下の事実を用いる．これは，付録 A-2 の「線形常微分方程式の基本定理」からの帰結である：

定理. 区間 I の点 $t_0 \in I$ を一つ固定する．区間 I で定義され，n 次正方行列に値をとる C^∞-級関数 $\Omega(t)$ が与えられたとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}$ で，

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \mathcal{F}\Omega, \qquad \mathcal{F}(t_0) = I = n \text{ 次単位行列} \tag{5.1}$$

をみたすものがただひとつ存在する．

系. 上の定理の状況で，さらに n 次正方行列 A が与えられているとする．このとき，I 上で定義された行列値 C^∞-級関数 $\mathcal{F}_A$ で，

$$\frac{d\mathcal{F}_A}{dt} = \mathcal{F}_A\Omega, \qquad \mathcal{F}_A(t_0) = A \tag{5.2}$$

をみたすものがただひとつ存在する．

証明： (5.1) を満たす $\mathcal{F}$ に対して $\mathcal{F}_A = A\mathcal{F}$ (行列の積) とおけば，それが求めるものである．

問題

5-1 半径 a の球面上の曲線 $\gamma(s)$ (s は弧長) の捩率が 0 でないとき，曲率 κ と捩率 τ は

$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)^2 = a^2$$

を満たすことを示しなさい．

5-2 空間曲線 $\gamma(s)$ の $s = s_0$ における単位接ベクトル $\boldsymbol{e}(s_0)$, 主法線ベクトル $\boldsymbol{n}(s_0)$, 従法線ベクトル $\boldsymbol{b}(s_0)$ がそれぞれ x, y, z 軸の正の方向を向き，$\gamma(s_0) = 0$ となるような座標系をとる．このとき，$s = s_0$ の近くでの曲線の像の xy 平面，yz 平面，zx 平面への正射影はどのような形になるか，図示しなさい．ただし s_0 における曲率と捩率はともに正の値をとるとする．

5-3 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率，捩率が

$$\kappa(s) = \frac{1}{1+s^2}, \qquad \tau(s) = \frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする．

- ある一定な単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい．
- この $\boldsymbol{v}$ に対して，$\gamma(s)$ の，$\boldsymbol{v}$ の直交補空間への正射影 $\gamma^* = \gamma(s) - \big(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v}\big)\boldsymbol{v}$ はどんな曲線か．

5-4 原点を中心とする半径 1 の球面上の曲線 $\sigma(t)$ ($|\sigma| = 1$) が $\det(\sigma, \dot\sigma, \ddot\sigma) \neq 0$ を満たしているとする．このとき，

$$\gamma(t) := \int^t (\sigma(u) \times \dot\sigma(u))\, du \tag{*}$$

とおくと，γ は 0 でない曲率をもち，捩率が 1 となる曲線となる．逆に，曲率が 0 にならず，捩率が 1 となるような曲線 γ に対して，ある球面上の曲線 σ で (*) を満たすものが存在する．（ヒント：$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{b}$）