2015 年 11 月 16 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 幾何学概論講義資料 6

## 前回までの訂正

- NTT 曲線の回転数は $\pm 2$ です.

## 授業に関する御意見

- 今回の講義もわかりやすかったです. **山田のコメント：** ほんと? わかりにくくしているつもりなんですが.
- いろいろな雑談が聞けて楽しかった.
  **山田のコメント：** 本当に雑談なんでしょうかね. ひょっとしたら, 授業内容に密接に関連してるかも.
- 特に無いです. /特になし/特にありません. **山田のコメント：** me, too.

## 質問と回答

**質問：** 捩率 $\tau$ の定義 $\tau := -\boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{n}$ について, マイナスをつける理由（マイナスをつける事でどんな一貫性が保たれるか等）があれば教えていただけますか.

**お答え：** まず, マイナスをつけない人もいます.（たとえば, 古くからよく使われている教科書 M. P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, 1976 では, $\tau$ の定義はこの授業と逆の符号です). この授業では（教科書にしたがって）マイナスをつることにする, というだけなのですが, この符号は次のように決めたと思って下さい：つるまき線 $\gamma(t) = \bigl(a\cos t, a\sin t, bt\bigr)$ で, とくに $a > 0$, $b > 0$ の場合を考えます. これは「上」から見ると半時計回りの円を描いていますが, とくに $b > 0$ なので, 進行するにしたがって上に行く曲線です. このようなつるまき線の捩率を「正」としたい.

**質問：** $\kappa' = \frac{d}{ds}|\gamma''| \neq |\gamma'''|$ ですか.

**お答え：** そのとおりで,

$$\kappa' = |\gamma''|' = \frac{d}{ds}\bigl(\gamma'' \cdot \gamma''\bigr)^{1/2} = \frac{\gamma''' \cdot \gamma''}{\bigl(\gamma'' \cdot \gamma''\bigr)^{1/2}}.$$

**質問：** 平面曲線のときのように $\boldsymbol{n}(s)$ を成分で求めて, 曲率 $\kappa(s)$ を求めることは空間曲線ではできないのですか.

**お答え：** 主法線ベクトルの定義が $\boldsymbol{n}(s) := \gamma''(s)/|\gamma''(s)|$, 曲率の定義は $\kappa(s) := |\gamma''(s)|$ なので,「主法線ベクトルをもとめてから曲率を求める」のは順番が逆.

**質問：** 問 5-1 を $\gamma(s) = \bigl(x(s), y(s), z(s)\bigr)$ とおいて成分計算で示すことはできますか? やってみたのですが, うまくいかなかったので質問しました.

**お答え：** もちろん, 曲率や捩率を $x$, $y$, $z$ で表せば, 原理的にはできますが, 面倒くさいはず.（やってみた, というのですから, $\kappa$, $\tau$ を $x$, $y$, $z$ で表してみましたね?）フルネ枠を使うと, 曲線の「形」に即した議論ができて便利, というのがこの問題の意図（こういうのを「題意」っていうんですよね, きっと）です.

**質問：** 問題 5-1 で微分方程式を解かずに済ませる解き方はありますでしょうか.

**お答え：** 問題 5-1 で微分方程式は解かないと思います.

**質問：** 空間曲線における回転数は平面曲線と同様に定義されるのでしょうか. また空間曲線において, 正則ホモトピー同値であるための必要十分条件は何ですか.

**お答え：** 空間閉曲線の曲率の積分は一般に $2\pi$ の整数倍にはならないので, 平面曲線のような回転数は定義できません. 空間曲線の同値条件については, 結び目理論の本をご覧ください.

**質問：** $\mathbb{R}^4$ の場合においても平面や空間のときと同様に曲線を定義できると思うのですが, その場合, 曲線は何によって決まるのでしょうか.

**お答え：** この講義で扱ったフルネ枠を考えるのと同様にして, 曲率や捩率に相当する量が 3 つ定義され, それにより曲

線が決まります：$\mathbb{R}^4$ の曲線 $\gamma(s)$（$s$ は弧長）に対して $\boldsymbol{e}_1(s)=\gamma'(s)$, $\kappa_1(s):=|\boldsymbol{e}_1'(s)|$ とおき，$\kappa_1(s)\neq 0$ と仮定すると，$\boldsymbol{e}_2(s):=\boldsymbol{e_1}'(s)/\kappa_1(s)$ により $\boldsymbol{e}_1$ と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}_2$ が定義される．いま

$$\boldsymbol{e}_2'\cdot\boldsymbol{e}_1=(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1)'-\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_1'=-\kappa_1(\boldsymbol{e}_2\cdot\boldsymbol{e}_2)=-\kappa_1$$

に注意すると，$\boldsymbol{e}_2'+\kappa_1\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{e}_1$ に直交する．また，$\boldsymbol{e}_2$ は単位ベクトルなので，$\boldsymbol{e}_2'$ は $\boldsymbol{e}_2$ に直交する．したがって $\boldsymbol{e}_2'+\kappa_1\boldsymbol{e}_1$ は $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ に直交する．このベクトルが零ベクトルでないと仮定すると，

$$\boldsymbol{e}_3:=\frac{\boldsymbol{e}_2'+\kappa_1\boldsymbol{e}_1}{|\boldsymbol{e}_2'+\kappa_1\boldsymbol{e}_1|},\qquad \kappa_2:=|\boldsymbol{e}_2'+\kappa_1\boldsymbol{e}_1|>0$$

をみたす単位ベクトル $\boldsymbol{e}_3$ と関数 $\kappa_2$ が定まる．とくに $\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}$ は正規直交系をなすので，$\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4\}$ が正の向きの正規直交系となるような単位ベクトル $\boldsymbol{e}_4$ をとることができる．そこで $\boldsymbol{e}_4'\cdot\boldsymbol{e}_3=:\kappa_3$ とすると，$\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_3$ が定まり，これが曲線を定める不変量となる．

**質問：** 今回 3 次元曲線（原文ママ：空間曲線，あるは 3 次元ユークリッド空間の曲線が正しいと思います．曲線自体は 1 次元の図形なので「3 次元曲線」という言葉は激しく違和感があります）のパラメータ表示についてやりましたが，2 つの陰関数の共通部分で書く方に利点はあるのですか? それこそ 3 次元曲線を含む曲面は無数に存在するのであまりこの表し方がよくなる場合が浮かばないのですが.

**お答え：** むしろ「なにか 2 つの方程式がでてきた」らそれをみたす点の集合は曲線ですよね，ということが理解できないとまずいんじゃないですか? すなわち，初めから「曲線」を考えるのではなく，別の問題を考えていると，3 変数の方程式が 2 本でてきた，というのはよくあることではないでしょうか.

**質問：** 捩率の定義 $\tau=-\boldsymbol{b}'\cdot\boldsymbol{n}$ がなんともとらえどころのない定義に感じます．(特に $\boldsymbol{b}'$ って何! と思います.）が直感的な理解のしかたがあれば教えて下さい．/ 捩率の図形的な意味は何ですか? **お答え：**今回やります.

**質問：** どうやったら日本語を適切に使えるようになりますか?

**お答え：** たくさん読んで書く．自分で書いた文は読み返して，ツッコミを入れる.

**質問：** よく「特になし」を見かけますが「特になし」と書くメリットはあるのでしょうか?（他同様，加点される等. . . ）

**お答え：** 特にありません.

**質問：** この欄に「特になし」と書いても点数はつくのでしょうか. **お答え：**いいえ.

# 6 空間曲線

**■曲率・捩率の図形的な意味** 接触平面，展直平面，法平面/平面への射影/ブーケの公式/平面曲線となるための条件

**■空間曲線の基本定理**

# 問題

6-1 曲率が一定な球面曲線は円である.

6-2 弧長でパラメータづけられた曲線 $\gamma(s)$ の曲率，捩率が

$$\kappa(s)=\frac{1}{1+s^2},\qquad \tau(s)=\frac{2}{1+s^2}$$

で与えられているとする.

- ある一定な単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で $\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が一定であるようなものが存在することを示しなさい.
- この $\boldsymbol{v}$ に対して，$\gamma(s)$ の，$\boldsymbol{v}$ の直交補空間への正射影 $\gamma^*=\gamma(s)-\big(\gamma(s)\cdot\boldsymbol{v}\big)\boldsymbol{v}$ はどんな曲線か.

2015 年 11 月 16 日