2015 年 11 月 30 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 7

前回までの訂正

- 教科書 271 ページ，下から 4 行目（§5 問題 7 の解答）：γ'' は $\gamma\times\gamma''$ に比例 ⇒ γ''' は $\gamma\times\gamma''$ に比例．ただし，これでは不完全（$\gamma\times\gamma''=\mathbf{0}$ の場合にこの議論は無効）なので講義中に説明します．
- 教科書 293 ページ，索引の右カラム：接触平面 tangent plane ⇒ 接触平面 osculating plane

授業に関する御意見

- 問題の解説もあってわかりやすい． **山田のコメント：** そう?
- 捩率が何を意味するのかすこしわかりました． **山田のコメント：** ですよね．
- 演習問題の解説を配布してもらいたいです． **山田のコメント：** なぜ?
- 特になし（2 件）/特にありません．/特にないです/現状ありません **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 平面曲線の曲率は $\kappa(s)=\frac{d\theta}{ds}$ と表すことができました．空間曲線の曲率も同様に角度を用いて表せるのでしょうか．（その際，角度 θ,φ の 2 つになりそうですが．）さらに捩率も角度を用いて表せるでしょうか．

お答え： 何の角度を想像するか，ですね．たとえば $\boldsymbol{e}$ は単位球面上の点と思えますが，これを球面極座標（緯度・経度の表示）で表すとき，これらの角度の微分はどうなるか，計算してみましたか?

質問： 6-2 に関することで，次の命題は成り立つのでしょうか：$\gamma(s)$：弧長パラメータづけられた曲線．曲率と捩率の比が一定 ⇔ ある一定の単位ベクトル $\boldsymbol{v}$ で，$\gamma'(s)$ と $\boldsymbol{v}$ のなす角が一定であるようなものが存在する．

お答え： 正しい．⇒: $\tau/\kappa=\alpha$ (定数) として $\boldsymbol{v}=(\alpha\boldsymbol{e}+\boldsymbol{b})/\sqrt{1+\alpha^2}$ とおけば，フルネ・セレの公式から $\boldsymbol{v}'=\mathbf{0}$，さらに $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}$ が一定だから $\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{v}$ は定角をなす．⇐: 条件をみたすベクトル $\boldsymbol{v}$ をフルネ枠により $\boldsymbol{v}=p\boldsymbol{e}+q\boldsymbol{n}+r\boldsymbol{b}$ と表すと，$\boldsymbol{e}$ と定角をなすから p は定数．また条件 $\boldsymbol{v}'=\mathbf{0}$ から $q=0$，r は定数で，$p\kappa-r\tau=0$ を満たす．

質問： 球面曲線とは「ある 1 つの球面に含まれる曲線」という解釈で良いでしょうか．すでに授業で定義していたらすみません． **お答え：**よいです．口頭で説明しました．「平面曲線」から類推すればわかるはずですね．

質問： 空間曲線の問題で，捩率の条件を用いたくても，その定義には外積ベクトルを微分したベクトルが登場するので，成分計算にも踏みきれず毎回たじろいでしまいます．捩率と友達になるにはどういうステップを踏めばよいですか． **お答え：**まず「成分計算へのこだわり」を捨てたらどうでしょう．講義では，成分計算をせずにフルネ・セレの公式を使いましたね．原理的には成分計算でもできるのでしょうが，あなたはそれほどに計算がうまいですか?

質問： 空間曲線の曲率を $|\gamma''|$，主法線ベクトルを $\frac{\gamma''}{|\gamma''|}$ と定義していましたが，$\kappa=0$ のときの主法線ベクトル，従法線ベクトルは定義されないということですか．また，曲率が 0 となるとき，空間曲線の基本定理（に相当するもの）は成り立つのでしょうか． **お答え：**そう，$\kappa=0$ なる点では $\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ は定義されない．曲率が 0 となる点を含む区間を考えるには，そのために理論をつくる必要がある．問題に適したフレームを考えるのがよいはずです．

質問： 曲率も捩率も一定のときは常らせんのような繰り返し構造をもつと思ったのですが，そのような認識で合っていますか? **お答え：**認識って何ですか? 曲率と捩率がともに 0 でない定数ならば，常螺線．実際，常螺線の曲率・捩率は定数（授業でもやった）なので，空間曲線の基本定理の一意性の部分から曲率・捩率が一定なら常螺旋に一致することがわかる．これは定理であって「認識」なんていう曖昧なものではない．

質問： 捩率の 0 以外の時の図的な意味を教えてください． **お答え：**ということを講義でやった．つるまき線を考えよ．

質問： 捩率 0 の曲線が接触平面に含まれることは分かりましたが，法平面や展直平面でも似たような考え方は無いのですか? **お答え：**「似たような考え方」とぼかしているところがずるい気がするが，もし，曲線の像が平面に含まれていたら，その平面は自動的に接触平面になりませんか?

質問： フレネ・セレの公式に用いた行列 $\mathcal{F}=(\boldsymbol{e},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b})$ は，フレネ・セレの公式の他にも何か特徴はありますか?

お答え： どういう答えを期待しますか? 直交行列に値をとる．もちろん s の関数として $\mathcal{F}'=\mathcal{F}\Omega$ という方程式で決まってしまうので，特徴は原理的にはフレネ・セレの公式からすべてでてきてしまうはずですね．

質問： Frenet 枠 = 正規直交枠 とみなして大丈夫ですか? **お答え：**大丈夫ではありません．“=” と書くからには Frenet 枠と正規直交枠は同じ意味ということになりますが，そうではありません．空間曲線の単位接ベクトル，主法線ベクトル，従法線ベクトルからなる正規直交枠（の 1 パラメータ族）のことを Frenet 枠と言います．

質問： 展直平面を $e\times b$ 平面としていましたが，$e\times n$ 平面，$n\times b$ 平面とくると $b\times e$ 平面とするのが自然と感じました．とくに $e\times b$ とした意味はあるのでしょうか． **お答え：**$\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{b}$ 平面 (太字に注) とは書いていないと思う．

質問： 法平面への射影を考えたときに，$\left(\frac{1}{2}\kappa s^2+\frac{1}{6}\kappa'(s^3)\right)\boldsymbol{n}+\left(\frac{1}{6}\kappa^2\tau s^3\right)\boldsymbol{b}+O(s^3)$ を $\{(s^2,s^3)\,|\,s\in\mathbb{R}\}$ としていましたが，これは成分のオーダーのみを考えて書いていますか? **お答え：**口頭で述べただけですが，射影は（質問にある式から）$s=0$ に特異点をもちます．「曲線 $\{(s^2,s^3)\,|\,s\in\mathbb{R}\}$ と同様に」という意味です．

質問： 授業中に「中華思想 (?)」と聞こえたりしますが，どういう意味でしょうか **お答え：**11 月 9 日頃の講義の意味.

質問： 5-2 の問題の類題がテストなどで出されたときは，授業と同様に 3 次の項までテイラー展開すれば十分ですか?

お答え： 「類題」とはどれくらい似たものかによって，展開に必要な次数は異なるので，お答えできません．ちなみに，山田の試験では問題を読めば自明になるように出題します．

質問： 質問レベルが他の人より低くなってしまって不安なのですが.... どうすればいいでしょう．というより授業を理解納得すると質問が浮かびにくいです． **お答え：**いままでの皆さんの質問を見よう．すべて，あなたが「わかっている内容」ですか？もしそうならば「理解納得したので質問が浮かびにくい」という状況は理解できますが．まず「納得する」ためのハードルを上げてみましょう．あえてツッコミをいれ，それに答る努力するのは有効と思う．

質問： 初回のプリントに「所定の用紙と異なる形式のものは受け付けません」とありますが，同じ形式かどうかを判断する基準等がありましたら，よろしければ教えていただきたいです．

お答え： 所定の用紙と同じことがほぼ同じ場所に書いてあること．（山田注：質問者は，市販の A4 判用紙に提出用紙と同様の内容を書き，それに回答をしました．その上での質問ですが，「この授業に関する希望など」の部分が「この授業に関する質問など」と誤記されていて，「特にありません」という回答でした．用紙の文言に従うと，上の「質問欄」にかかれた質問はなかったことになり，まずいので，この用紙は「所定の用紙と同じ形式」と認めません．）

質問： 今回は特にないです． **お答え：**me, too.

7 曲面 (§6)

問題

7-1 $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への滑らかな写像 $p(u,v)=(3u^4+u^2v,4u^3+2uv,v)$ について，

(1) p_u と p_v が一次従属であるような $\mathbb{R}^2$ の点 (u,v) の集合を求めなさい．

(2) $p(a_1)=p(a_2)$ $(a_1\neq a_2)$ となる $\mathbb{R}^2$ の点の組 (a_1,a_2) をすべて求めなさい．

7-2 単位球面の次のふたつのパラメータ表示（定義域は適当に考えよ）の間の座標変換を与えなさい．

$$p(u,v)=\bigl(\cos u\cos v,\cos u\sin v,\sin u\bigr),\qquad \tilde{p}(\xi,\eta)=\left(\frac{2\xi}{1+\xi^2+\eta^2},\frac{2\eta}{1+\xi^2+\eta^2},\frac{\xi^2+\eta^2-1}{1+\xi^2+\eta^2}\right)$$

7-3 陰関数表示 $F(x,y,z)=0$ で表示された滑らかな曲面上の点 (x_0,y_0,z_0) における単位法線ベクトルは

$$\pm\left.\frac{\operatorname{grad}F}{|\operatorname{grad}F|}\right|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}\qquad \operatorname{grad}F=(F_x,F_y,F_z)$$

であることを示しなさい．

7-4 関数 $f(x,y)=x^2+y^2$ （回転放物面）の $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqq 1\}$ に対応する部分の面積を求めなさい．

2015 年 11 月 30 日