2015 年 12 月 7 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

# 幾何学概論講義資料 8

## お知らせ

- 中間試験の予告をしました．欠席された方は，講義 web ページ/OCW にて予告を確認してください．

## 授業に関する御意見

- これから曲面の講義が続いていくと思うのですが，曲線と異なる点や一致する点を明確に講義して欲しいです．
  **山田のコメント：** 今回もいくつか説明しましたよね．ちゃんと受け取れていますよね．
- (感想)「中華思想」「宗教上の理由で...」というジョークを交えた解説・指摘がおもしろいです． **山田のコメント：** そう?
- いつも学生より早く先生が来ていらっしゃるのを見て素晴らしいと感じています．自分も遅刻しないように気をつけねば．
  **山田のコメント：** そうしてね ♡
- 特になし．/特にありません/特にございません． **山田のコメント：** me, too.

## 質問と回答

**質問：** 曲面のパラメータ表示の定義について，解析の講義では，関数 $p\colon D \to \mathbb{R}^3$ そのものを曲面と定めているのですが，この幾何学概論の講義では，「関数」を曲面と定めるのか，関数で与えられる集合 $\{p(u,v) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (u,v) \in D\}$ を曲面と定めるのか，両方か，どれなのでしょうか?

**お答え：** この授業では「曖昧」にしています．山田は写像 $p$ を曲面と呼んでしまいたいのですが，その像を考えることもないわけではありません．どちらかを特に考えなければならない場合は文脈から明らかになるようにします．

**質問：** 曲線のときと同じように，この授業では「曲面」の定義はしないのですか? **お答え：**しません．

**質問：** 「図形全体を複数のパラメータで表す場合もある」とありましたが，可算無限個もしくは非可算無限個のパラメータを使わないとパラメータ表示できないような曲面はあるのでしょうか． **お答え：**例えば「無限人乗れる浮袋」は $\mathbb{R}^2$ の領域と同相な有限個の部分に分けられないので，質問のような性質を持ちます．

**質問：** 2 つのパラメータと球面上の点が一対一で対応するようなパラメータのとりかたはありますか?

**お答え：** ありません．$\mathbb{R}^2$ の任意の領域は球面と同相ではないので．

**質問：** $\mathbb{R}^2$ の領域で球面と同相なものがないとのことでしたが，どのように示せるのでしょうか．

**お答え：** 任意の $\mathbb{R}^2$ の領域はコンパクトでない．一方球面はコンパクト．

**質問：** 曲面のパラメータ表示は複数あるということですが，パラメータによらない量は曲面の面積以外に何かあるのでしょうか． **お答え：**それがこれから数回のテーマ．

**質問：** 3 つの「曲面の表示の仕方」をやりましたが，3 つのうちどれか 1 つで表されれば，曲面だと定義してよいのでしょうか． **お答え：**（局所的には）そうです．正則なパラメータ表示が与えられれば局所的にグラフ表示を作ることができる（逆関数定理）し，グラフ表示からは陰関数表示がえられます．また，陰関数表示が与えられれば局所的にグラフ表示ができる（陰関数定理）ので，さらにパラメータ表示もできます．

**質問：** 曲面の表示の仕方がいくつかあることを習いましたが，使い分け方があれば教えていただきたいです．それとも基本的にパラメータ表示が良いのでしょうか．

**お答え：** この講義では主にパラメータ表示された曲面を考えます．使い方は問題に依存します．最初からレシピがあるので，それを覚えておけばいい，などとお手軽に考えないでください．

**質問：** 曲面の特異点は曲線の特異点よりも複雑なことが起こったりするのでしょうか．

**お答え：** はい，次元があがるとどんどん複雑になります．

**質問：** 複素解析でも「正則」という言葉があったのですが，今回の授業で扱った「正則」とはまったく関係ないと考え

　　ても大丈夫でしょうか．　**お答え：**関係ありません．
**質問：**　曲線の名称で「NTT 曲線」とありましたが，それは一般的にそう呼ばれているのでしょうか?
**お答え：**　いいえ．リマソン limaçon が（ある場合に）そのような性質をもちます．
**質問：**　問 7-1 の写像をパラメータ表示するとどのような曲面になるのでしょうか．
**お答え：**　パラメータ表示されていますが．
**質問：**　計算でがんばったが，もっとスマートな解き方があったら解説していただきたい．(7-1) について．
**お答え：**　計算で頑張るんじゃないかなぁ．
**質問：**　特になし/特にありません（2 件）/なし．　**お答え：**me, too.

# 8 第一基本形式（§7）

## 問題

8-1 助変数表示された曲面 $p(u,v)=\bigl(u,v,u^2-v^2\bigr)$ と $(u,v)$ 平面上の曲線 $\gamma_\theta(t)=t(\cos\theta,\sin\theta)$ 　$t\in[0,1]$ に対して，$p\circ\gamma_\theta$ は，曲面上の曲線となる．$\theta$ が $-\pi$ から $\pi$ まで変化するときの，この曲線の長さの最大値，最小値を求めなさい．

8-2 パラメータ表示された曲面 $p(u,v)$ に対して，$\hat p(u,v)=Rp(u,v)+\boldsymbol{b}$ ($R$ は 3 次の直交行列，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^3$), $\varepsilon=\det R$ とするとき，次を示しなさい：

$$R\frac{p_u\times p_v}{|p_u\times p_v|}=\varepsilon\left(\frac{\hat p_u\times\hat p_v}{|\hat p_u\times\hat p_v|}\right).$$

8-3「第一基本形式はパラメータのとり方によらない」とはどういうことか説明しなさい．

8-4 曲面 $p(u,v)$ のパラメータ $(u,v)$ が等温座標系であるとは，第一基本量が $E=G$, $F=0$ を満たすことである．このとき，さらにこのパラメータ表示から向きを保つパラメータ変換で得られる同じ曲面のパラメータ表示 $\tilde p(\xi,\eta)$ で $(\xi,\eta)$ が等温座標系であるための必要十分条件は

$$u+iv\longmapsto\xi+i\eta\qquad(i=\sqrt{-1})$$

が（複素関数論の意味で）正則関数となることであることを示しなさい．

8-5 平面上の長さ $\mathcal{L}$ の閉曲線 $\gamma(s)$ （$s$ は弧長）の重心とは，

$$\frac{1}{\mathcal{L}}\int_0^{\mathcal{L}}\gamma(s)\,ds$$

で与えられる平面上の点である．
$xz$ 平面の上半平面 $\{(x,z)\,|\,z>0\}$ 上の閉曲線 $\gamma(s)$ を $x$ 軸の回りに回転して得られる曲面の面積は，$\gamma$ の重心が回転した道のりと $\gamma$ の長さの積である．このことを示しなさい．

2015 年 12 月 7 日