2015 年 12 月 14 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

## 幾何学概論講義資料 9

## お知らせ

- 次回，12 月 21 日は中間試験を行います．詳細は前回の予告をご覧ください．

## 授業に関する御意見

- 講義プリントを月曜日中にアップロードしていただくことは可能でしょうか．先週休んでしまったときに提出すべき問題がわからず少々困りました．　**山田のコメント：** 申し訳ありません．今回はすぐに上げます．
- 曲線と違って曲面では，回転，折り返し，平行移動，パラメータによらない量を考えるのは難しいことがわかりました．
  **山田のコメント：** ですよね．
- 特にないです（3 件）/特にありません/特になし（2 件）　**山田のコメント：** me, too.

## 質問と回答

**質問：** 内積の表現行列というものを初めて見ました．どのような定義なのでしょうか．

**お答え：** $n$ 次元実ベクトル空間 $V$ に内積 $\langle\ ,\ \rangle$ が与えられているとき，$V$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ に対して
$$G := \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_1\rangle & \dots & \langle \boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_n\rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_1\rangle & \dots & \langle \boldsymbol{v}_n,\boldsymbol{v}_n\rangle \end{pmatrix}$$
を「内積 $\langle\ ,\ \rangle$ の基底 $\{\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_n\}$ に関する表現行列」という．とくに，ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}\in V$ が $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{v}_1+\dots+a_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{v}_1+\dots+b_n\boldsymbol{v}_n$ と基底 $\{\boldsymbol{v}_j\}$ によって表されているなら，列ベクトル $\tilde{\boldsymbol{a}}:={}^t(a_1,\dots,a_n)$, $\tilde{\boldsymbol{b}}:={}^t(b_1,\dots,b_n)$ を用いて，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle={}^t\tilde{\boldsymbol{a}}G\tilde{\boldsymbol{b}}$ と書ける．

**質問：** 曲面 $p(u,v)$ に対して，点 $p(u_0,v_0)$ における曲面の接ベクトル空間とは $p_u(u_0,v_0)$, $p_v(u_0,v_0)$ が張る平面のことでしょうか．　**お答え：**そうです．

**質問：** 第一基本量はなぜ $E$, $F$, $G$ で表記するのでしょうか．　**お答え：**多分ガウスによる（と言った気がします）．

**質問：** 問 8-4 で第一基本量 $E=G$, $F=0$ を満たすパラメータ $(u,v)$ を等温座標系であるとしていますが，なぜ等温なのでしょうか．　**お答え：**教科書 171 ページ．

**質問：** 「第一基本形式」の「形式」とはどういう意味なのでしょうか．英語だと “form” ですが，いまいちよく分かりません．　**お答え：**「いまいち」が気に食わないですね．これを使う場面では，どこまでわかっていてどこから先がわからないのか明示すべきだと思います．回答：二次形式の「形式」です．

**質問：** 講義の中で $du$ や $dt$ の掛け算や足し算をしていましたが，これはどのように正当化されるのでしょうか．またどのくらいの演算まで拡張でくるのでしょうか．（例えば $dx$ の冪根のようなものは考えられるのでしょうか）．

**お答え：** 講義で $du$, $dt$ などは「行ベクトル」という説明をしました．したがって，これらの加法とスカラ倍は意味があります．さらにこれらの行ベクトルは，列ベクトルに左から掛けることで $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}$ への線形写像を与えます．こうみなした時の $du$ と $dv$ の「テンソル積の対称化」を $du\,dv$ と書くのですが，ここでは深入りせずに「形式的な記号」と思っていただけばよいです．また，$du$ のべき根なども考える場合がありますが，それなりに定義があります．たとえばここ（PDF ファイルからリンクを貼っています）の 4 ページ目にある．

**質問：** 面積などを求めるとき，第一基本形式を求めなくても $p(u,v)$ から第一基本量を直接導けるので，あまり必要性を感じないのですが，第一基本形式を求めなければ求まらないような曲面の面積や長さがあるのですか．

**お答え：** 第一基本形式を求めることと，第一基本量を求めることは同じことですから，回答は「ない」．第一基本形式は「こう書くとパラメータのとり方によらない量である」という意味で philosophical に重要．

**質問：** 次の計算は形式的にやっていますか?

$$\left|\frac{d\tilde{\gamma}}{dt}\right|^2 = E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2 = E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{E(du)^2+2Fdudv+G(dv)^2}{dt^2} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

**お答え：** はい.

**質問：** $ds^2$ と出てきた時の $ds$ というのは第一基本形式の時に定義された新しい考えですか? なぜ 2 乗で定義されているのでしょうか. **お答え：**その理由を，弧長の測り方を使って説明しましたね.

**質問：** $p(u,v) \in \mathbb{R}^n$ $(n \geqq 4)$ の場合でも第一基本形式は使えますよね. **お答え：**はい.

**質問：** $E$ や $F$ にチルダが付いている ($\widetilde{E}$ とか) の区別はパラメータの違いで合っていますか?

**お答え：** 授業で扱った文脈ではそうです.

**質問：** 8-2 で示すべき等式はどのような意味があるのでしょうか.

**お答え：** 曲面を回転させると，単位法線ベクトルも同じ回転で変化する.

**質問：** $R$ を直交行列として $(Rp_u) \times (Rp_v) = (\det R)R(p_u \times p_v)$ は直感的には明らかなのですが，成分計算をして証明はしたくないです．直交行列と外積の性質から何とか証明できないでしょうか. **お答え：**教科書 209 ページ.

**質問：** 第一基本量では曲面を定められないとあったが，第一基本量 $+\alpha$ をすることで曲面を定めることはできるのですか? （第二基本量は第一基本量とは無関係な基準をもとにしているのか否かが気になる）

**お答え：** 第一基本量と第二基本量できまる，と講義中に口走りました．カッコ内は意味がわかりません.

**質問：** 第 $n$ 基本形式まで存在するのですか?

**お答え：** 曲面では第一，第二，第三基本形式をよく用います（存在する，の意味がよく分かりませんが).

**質問：** 良い性質を持った曲面の境界として現れる空間閉曲線の性質で，面白いものはありますか?

**お答え：** 結構なんでもありで特徴づけられないことが多いと思います．たとえば「極小曲面」(平均曲率が恒等的に 0 であるような曲面）は良い性質をもった曲面ですが，「任意のなめらかな閉曲線に対してそれを境界にもつ極小曲面の存在」が知られています（プラトー問題の解，J. Douglas (1931), T. Rado (1933)).

**質問：** 12/7 に配られた中間試験の予告の紙について (1) 『好きなことを書き込んで持ち込んでよい』とありますが，授業で学習した内容を書いて持ち込んでよいということですか. (2)『この用紙と筆記用具以外は持ち込み禁止』とありますが，ここにおける “持ち込み” の定義がもしあれば教えて下さい．もし無ければ，筆記用語と “この用紙” 以外のものをかばんに仕舞い，机の下に置いて，中の物が作動せずにかつ受験者が使える状態にすることは “持ち込んで” いることになりますか. **お答え：**(1) もしそれが「好き」ならどうぞ. (2) 試験時間中にアクセス可能な状態にあるものは「持ち込まれた」．とします.

**質問：** 8-1 をざせつしてしまったのが解説が欲しいです（原文ママ） **お答え：**次回の最初に.

# 9 第二基本形式

## 問題

9-1 テキスト 92 ページ問題 9

9-2 テキスト 92 ページ問題 11

9-3 テキスト 91 ページ問題 6

9-4 パラメータづけられた曲面 $p(u,v)$ の単位法線ベクトルを $\nu$ とするとき，

$$\widehat{III} = \begin{pmatrix} \nu_u \cdot \nu_u & \nu_u \cdot \nu_v \\ \nu_v \cdot \nu_u & \nu_v \cdot \nu_v \end{pmatrix}$$

を第三基本行列，その各成分を第三基本量という．次を示しなさい：

- $\det \widehat{III} = K^2(EG - F^2)$. ただし $K$ はガウス曲率，$E$, $F$, $G$ は第一基本量である.
- $\widehat{III} - 2H\widehat{II} + K\widehat{I} = O$. ただし $H$ は平均曲率，$\widehat{I}$, $\widehat{II}$ はそれぞれ第一基本行列，第二基本行列である.

---

2015 年 12 月 14 日