幾何学概論 中間試験 〔問題 1〕

注意事項
- 解答は, 解答用紙の所定の欄に, 採点者が読みとり, 理解できるように書いてください.
- 計算や下書きには余白や裏面を使用してください（採点の対象とはしません）.
- 試験終了後は, **解答用紙**と**持込用紙**を回収します. **持込用紙には学生番号と氏名を記してください**. 問題は持ち帰っていただいて結構です.
- 試験中は問題の内容に関する質問は一切受け付けません. 問題が正しくないと思われる時はその旨を明記し, 正しいと思われる問題に直して解答してください.
- 答案は **12 月 24 日**以降, 数学事務室（本館 3 階 332B）にて返却いたしますので, 必ず受け取って下さい.
- 採点に関する質問・クレイムなどは **2016 年 1 月 12 日授業終了後**までに山田までお申し出ください. 上記期日以降のクレイムは, **たとえこちらの採点に不備があったとしても受け付けません**. ご了承下さい. また, 返却答案を受け取らない方はクレイムをつける権利がありません.

指定用紙のみ持込可

問題 A 次の文中の $\boxed{1}$ ~ $\boxed{20}$ に最もよく充てはまる数・式を入れ, 下線 **a** ~ **d** を付した部分の証明を与えなさい. なお, "·" は $\mathbb{R}^3$ の標準的な内積, 下付き添字 u, v はそれぞれ変数 u, v に関する偏微分を表す. [80 点]

uv 平面の領域 D から $\mathbb{R}^3$ への C^∞ 級写像

$$p\colon D \ni (u,v) \longmapsto \bigl(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\bigr) \in \mathbb{R}^3$$

が**なめらかな曲面の正則なパラメータ表示**を与えている, すなわち D の各点で「$\boxed{1}$」という性質が成り立っているとする.
このとき, ベクトル積（空間ベクトルの外積）を用いて $\nu := \boxed{2}$ とおけば, ν は p が表す曲面（以下, 曲面 p という）の**単位法線ベクトル**を与えている. また,

$$E := \boxed{3}, \quad F := \boxed{4}, \quad G := \boxed{5}, \qquad \widehat{I} := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

とおき, E, F, G を曲面 p の**第一基本量**, $\widehat{I}$ を**第一基本行列**とよぶ. 定義域 D の各点 (u,v) で$_{\mathbf{a}}$<u>第一基本行列は正則行列を与える</u>.
ここで, パラメータ変換

$$(u,v) = \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr) \tag{1}$$

が**向きを保つ**とは, そのヤコビ行列式が正となることである. パラメータ変換によって $\tilde{p}(\xi,\eta) := p\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ と表すと, $\tilde{p}$ も p と同じ曲面のパラメータ表示を与えている. このとき, $\tilde{p}$ の第一基本量 $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ は E, F, G とパラメータ変換 (1) のヤコビ行列 $J = \boxed{6}$ の成分を用いて $\widetilde{E} = \boxed{7}$, $\widetilde{F} = \boxed{8}$, $\widetilde{G} = \boxed{9}$ と表される. ただし, これらの式の右辺は $(u,v) = \bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$ における値とみなしている. とくに, $\tilde{p}$ の第一基本行列 $\widetilde{\widehat{I}}$ は, $\widehat{I}$ と J を用いて $\widetilde{\widehat{I}} = \boxed{10}$ と表すことができる. このことから, **第一基本形式** $ds^2 := E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ は$_{\mathbf{b}}$<u>パラメータのとり方によらない</u>ことがわかる.
次に, 曲面 p の単位法線ベクトル $\boxed{2}$ に対して$_{\mathbf{c}}$<u>$p_u \cdot \nu_v = p_v \cdot \nu_u$</u> が成り立つ. そこで,

$$L := \boxed{11}, \quad M := \boxed{12}, \quad N := \boxed{13}, \qquad \widehat{II} := \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

とおき，L, M, N を曲面 p の**第二基本量**，$\widehat{I\!I}$ を**第二基本行列**とよぶ．いま，パラメータ変換 (1) が向きを保つとき，$\tilde{p}(\xi,\eta)$ の単位法線ベクトル $\tilde{\nu}$ は ν と一致する：$\tilde{\nu}(\xi,\eta) = \nu\bigl(u(\xi,\eta), v(\xi,\eta)\bigr)$．したがって，$\tilde{p}$ の第二基本行列 $\widetilde{\widehat{I\!I}}$ は，$\widetilde{\widehat{I\!I}} = \boxed{14}$ と，$\widehat{I\!I}$, J を用いて表すことができる．とくに，**第二基本形式** $I\!I := L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2$ は向きを保つパラメータ変換で不変である．

曲面 p の第一基本行列，第二基本行列を用いて $A := \widehat{I}^{\,-1}\,\widehat{I\!I}$ とおくと A は実数の固有値をもつことがわかるが，さらに，$_{\mathbf{d}}$<u>A の固有値は，向きを保つパラメータ変換で不変</u>である．これらの固有値 λ_1, λ_2 の積 K と平均 H をそれぞれ**ガウス曲率**，**平均曲率**という．

いま，<u>正の定数</u> a, b が <u>$a^2 + b^2 = 1$</u> を満たしているとき，$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 p を

$$(*) \quad p(u,v) \ := \ \bigl(a\cosh u\cos v \,+\, b\sinh u\sin v,\ \ a\cosh u\sin v \,-\, b\sinh u\cos v,\ \ au \,+\, bv\bigr)$$

とすると，これは $\mathbb{R}^2$ 全体で正則な曲面のパラメータ表示を与えている．とくに p の単位法線ベクトルは $\nu = \boxed{15}$, 第一基本形式は $ds^2 = \boxed{16}$, 第二基本形式は $I\!I = \boxed{17}$ となるので，この曲面の主曲率は，$\boxed{18}$，ガウス曲率は $\boxed{19}$, 平均曲率は $\boxed{20}$ である．

問題 B [10 点] <u>正の定数</u> a, b が <u>$a^2 + b^2 = 1$</u> を満たしているとする．弧長 s によりパラメータ付けられた空間曲線 $\gamma(s)$ の曲率と捩率が

$$\kappa(s) = \frac{a}{1+s^2}, \qquad \tau(s) = \frac{b}{1+s^2}$$

で与えられているとき，$\boldsymbol{v} := b\boldsymbol{e} + a\boldsymbol{b}$ とおく．ただし，$\boldsymbol{e}, \boldsymbol{b}$ はそれぞれ γ の単位接ベクトル，単位従法線ベクトルである．このとき，$\boldsymbol{v}$ は $\gamma'(s)$ と一定の角をなす定ベクトルとなることを証明しなさい．

問題 C [10 点] 弧長 s をパラメータとする平面曲線 $\gamma(s)$ $(-\infty < s < +\infty)$ が次の性質を持っているとする：

- $\gamma(0) = (0,0)$, $\gamma'(0) = (1,0)$.
- 曲率関数は $\kappa(s) = \cos s$.

このとき

$$\gamma(s + 2\pi) = \gamma(s) + \boldsymbol{b} \qquad (s \in \mathbb{R})$$

を満たす $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\boldsymbol{b}$ が存在することを示しなさい．

問題 D [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

おつかれさまでした ♡

幾何学概論 中間試験 〔解答用紙 1〕

問題 A の解答欄 穴埋め各 3 点，証明各 5 点

1 $p_u(u,v)$, $p_v(u,v)$ が一次独立	2 $\dfrac{p_u \times p_v}{\lvert p_u \times p_v\rvert}$

3 $p_u \cdot p_u$	4 $p_u \cdot p_v$	5 $p_v \cdot p_v$	6 $\begin{pmatrix} u_\xi & u_\eta \\ v_\xi & v_\eta \end{pmatrix}$

7 $u_\xi^2 E + 2u_\xi v_\xi F + v_\xi^2 G$	8 $u_\xi u_\eta E + (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi)F + v_\xi v_\eta G$	9 $u_\eta^2 E + 2u_\eta v_\eta F + v_\eta^2 G$

10 ${}^t J \,\widehat{I}\, J$	11 $-p_u \cdot \nu_u$	12 $-p_u \cdot \nu_v$	13 $-p_v \cdot \nu_v$	14 ${}^t J \,\widehat{II}\, J$

15 $\dfrac{1}{\cosh u}(-\cos v, -\sin v, \sinh u)$	16 $\cosh^2 u(du^2 + dv^2)$

17 $-a\,du^2 - 2b\,du\,dv + a\,dv^2$	18 $\dfrac{-1}{\cosh^2 u}, \dfrac{1}{\cosh^2 u}$	19 $\dfrac{-1}{\cosh^4 u}$	20 0

学籍番号			-						氏名	

幾何学概論 中間試験 〔解答用紙 2〕

問題 A の解答欄（つづき）

a

シュワルツの不等式から

$$EG - F^2 = |p_u|^2|p_v|^2 - (p_u \cdot p_v)^2 \geqq 0.$$

この不等式の等号条件は p_u と p_v が一次従属であることだから，正則性から等号は成立しないので $\det \widehat{I} = EG - F^2 > 0$.

b

全微分の関係式

$$du = u_\xi\, d\xi + u_\eta\, d\xi, \qquad dv = v_\xi\, d\eta + v_\eta\, d\eta$$

から，

$$\begin{aligned}
&E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 \\
&\quad = E(u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\eta)^2 + 2F(u_\xi\,d\xi + u_\eta\,d\xi)(v_\xi\,d\eta + v_\eta\,d\eta) + G(v_\xi\,d\eta + v_\eta\,d\eta)^2 \\
&\quad = (u_\xi^2 E + 2u_\xi v_\xi F + v_\xi^2 G)d\xi^2 + (u_\xi u_\eta E + (u_\xi v_\eta + u_\eta v_\xi)F + v_\xi v_\eta G)d\xi\,d\eta \\
&\qquad\quad + (u_\eta^2 E + 2u_\eta v_\eta F + v_\eta^2 G)d\eta^2 \\
&\quad = \widetilde{E}\,d\xi^2 + 2\widetilde{F}\,d\xi\,d\eta + \widetilde{G}\,d\eta^2.
\end{aligned}$$

c

ν は p_u, p_v に直交するから，

$$\begin{aligned}
p_u \cdot \nu_v &= (p_u \cdot \nu)_v - p_{uv} \cdot \nu = -p_{uv} \cdot \nu \\
p_v \cdot \nu_u &= (p_v \cdot \nu)_u - p_{vu} \cdot \nu = -p_{vu} \cdot \nu
\end{aligned}$$

だが $p_{uv} = p_{vu}$ だから結論を得る．

d

問題文の記号を用いれば，$\tilde{p}$ に対して

$$\widetilde{A} := \left(\widetilde{\widehat{I}}\right)^{-1} \widetilde{\widehat{II}} = ({}^tJ\,\widehat{I}\,J)^{-1}({}^tJ\,\widehat{II}\,J) = J^{-1}AJ.$$

ここで，正則行列 P に対して，正方行列 B と行列 ${}^tPBP$ の固有値は一致するので，A と $\widetilde{A}$ の固有値は一致する．

学籍番号			-						氏名	

幾何学概論 中間試験 〔解答用紙 3〕

問題 B の解答欄 10 点

フルネ・セレの公式から

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{ds} = b\boldsymbol{e}' + a\boldsymbol{b}' = b(\kappa\boldsymbol{n}) + a(-\tau\boldsymbol{n}) = \frac{1}{1+s^2}(ab - ba)\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$

となる．ただし $\boldsymbol{n}$ は γ の主法線ベクトルである．したがって $\boldsymbol{v}$ は定ベクトル．
$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ は互いに直交する単位ベクトルで，$a^2 + b^2 = 1$ だから，

$$|\boldsymbol{v}|^2 = a^2 + b^2 = 1$$

となり，$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトル．さらに $\gamma' = \boldsymbol{e}$ も単位ベクトルだから，γ' と $\boldsymbol{v}$ のなす角を θ とすると，

$$\cos\theta = \boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\cdot(b\boldsymbol{e} + a\boldsymbol{b}) = b$$

となり，θ は一定になることがわかる．

問題 C の解答欄 10 点

曲線 γ は

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(\sin u)\,du,\ \int_0^s \sin(\sin u)\,du\right)$$

と表される．したがって

$$\begin{aligned}
\gamma(s+2\pi) &= \left(\int_0^{s+2\pi} \cos(\sin u)\,du\ \int_0^{s+2\pi} \sin(\sin u)\,du\right)\\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos(\sin u)\,du\ \int_0^{2\pi} \sin(\sin u)\,du\right) + \left(\int_{2\pi}^{2\pi+s} \cos(\sin u)\,du\ \int_{2\pi}^{2\pi+s} \sin(\sin u)\,du\right)\\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos(\sin u)\,du\ \int_0^{2\pi} \sin(\sin u)\,du\right) + \left(\int_0^{s} \cos(\sin(v-2\pi)\,du\ \int_0^{s} \sin(\sin(v-2\pi))\,du\right)\\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos(\sin u)\,dv\ \int_0^{2\pi} \sin(\sin u)\,dv\right) + \left(\int_0^{s} \cos(\sin v)\,dv\ \int_0^{s} \sin(\sin v)\,dv\right)\\
&= \left(\int_0^{2\pi} \cos(\sin u)\,dv\ \int_0^{2\pi} \sin(\sin u)\,dv\right) + \gamma(s).
\end{aligned}$$

ここで，置換 $v = u + 2\pi$ を行った．最後の式の第 1 項を $\boldsymbol{b}$ とすれば，これは問題の条件をみたす．

学籍番号			-						氏名	

山田光太郎 (Ver. 3. 2015.12.23)
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論 中間試験 〔解答用紙 4〕

この用紙には，問題 D への回答および学籍番号・氏名以外は記入してはいけません．

問題 D [0 点] この科目の授業，教材，試験などについて，御意見，ご希望，誹謗，中傷など，なんでもご自由にお書きください．なお，この問いへの回答は成績に一切影響しません．

回答欄

受験上の注意

座席表： この用紙の裏面に座席表があります．ご自分の学籍番号の座席に着席してください．

試験開始： 次の条件が満たされましたら，解答用紙・問題用紙を配布します．

- 受験者が着席していること．
- 各受験者が，筆記用具・持ち込み用紙・必需品（ハンカチ・ティシューペーパーなど；電話などは不可）以外の持ち物を鞄に入れ，机の下か足元に置いていること．
- 私語がないこと．

問題用紙・解答用紙： 問題用紙は 1 枚両面，解答用紙は 4 枚（この紙を含む）です．

- すべての解答用紙と持ち込み用紙には学籍番号と氏名を記入してください．
- **解答用紙 4 枚（この紙を含む）と持ち込み用紙はすべて提出**してください．持ち込み用紙を持参しなかった方は提出しなくて結構ですが，解答用紙が **4 枚揃っていない答案は採点いたしません**．
- 解答は所定のスペースに記入してください．欄外や裏面は採点の対象にしません．
- 問題用紙は提出せず，お持ち帰りください．

試験終了・回収： 指示に従わない場合，不正行為とみなすことがあります．

- 終了の合図がありましたら，筆記用具をおいてください．
- 答案回収が終わるまで席をたたないで下さい．私語は禁止．
- 答案は，上から，解答用紙 1, 解答用紙 2，解答用紙 3，解答用紙 4，持ち込み用紙の順に表（氏名を記入した方の面）を上にして重ねてください．
- 解答用紙を教室の黒板に向かって最右端の壁際から左，最左端の壁際まで送ります．その際，自分の答案用紙を，受け取った答案用紙の束の上に重ねて下さい．
- 教室最左端の席の方は，答案用紙の束を机の上おき，回収を待ってください．試験監督が回収を行います．
- すべての答案の回収が終わった時点で終了です．

学籍番号			-						氏名	