2016 年 1 月 4 日
山田光太郎
kotaro@math.titech.ac.jp

幾何学概論講義資料 10

お知らせ

- あけましておめでとうございます．新しい年が皆様にとって素晴らしいものとなりますように．
- 中間試験の答案を返却中です．定期試験の持ち込み用紙は答案に添付してあるものに限りますので，かならず答案を受け取ってください．返却場所などは試験問題に書いてあります．
- 中間試験の解答例などは，講義 web ページおよび OCW においてあります．こちらもご確認ください．

中間試験の訂正

- ヘッダにある山田のメイルアドレスが大昔のままでした．
- 注意事項の第 2 項：下書きにはは ⇒ 下書きには
- 注意事項の第 6 項 1 行目：**2014 年 1 月 12 日** ⇒ **2016 年 1 月 12 日**
- 1 ページ目，問題 A の下から 2 行目：$\boxed{1}$ ⇒ $\boxed{2}$
- 2 ページ目，問題 B：配点 10 点; 問題 C：配点 20 点 ⇒10 点
- 解答用紙 4 冒頭：**問題 C への** ⇒ **問題 D への**

中間試験のコメント

- 文字 ξ を ε と書いている方が 2 名．常識レベルなので，今回は減点しています．
- 偏微分記号 $\frac{\partial}{\partial u}$ を用いるべきところに常微分記号 $\frac{d}{du}$ と書いた人 2 名．これらを混同しては**まずい**．今回は該当する問題のみ減点しましたが，場合によっては試験まるごと 0 点にしてもよいと考えます．
- 「題意」という語を使った人 1 名．たしか講義時間にコメントしたと思うのですが，数学の文脈ではこの語の意味は確定していないと考えていますので，減点対象にしています．もし，意味が確定しているとお考えの上でこの語を使っているのであれば，根拠とともに山田まで教えて頂けると幸いです．

授業に関する御意見 (2015 年 12 月 14 日)

- 特にありません．今年はありがとうございました．来年もよろしくお願いします．そして良いお年を．
  山田のコメント： あけましておめでとうございます．この一年が良い年でありますように．
- 曲面が何によって定まるかを考えるのは難しいことがわかりました． **山田のコメント：** ですよね．
- 特にありません．/特になし **山田のコメント：** me, too.

中間試験問題 D の回答 (2015 年 12 月 21 日)

- 勝手な宣言：今度は頑張ります!!! **山田のコメント：** 頑張っても頑張らなくても，できていれば単位は出ます．
- 大変わかりやすいです．毎週の課題もちょうどいい難しさです． **山田のコメント：** そうですか?
- 試験の方式が良いと思いました（試験作成者・受験者側両者にとって合理的で）．少なくとも今まで東工大で受けた試験の中ではもっとも良いと思いました．
  山田のコメント： Thanks. 当方がどこまで手抜きできるかを考えたシステムです．今回は誤植が多くて申し訳ない．
- 講義から試験まで全体を通してシステムが非常に良いと思います．また，山田先生が学生想いであることがひしひし伝わってきます．良いお年をお迎えください． **山田のコメント：** 学生想いのわけないじゃないですか．良いお年をお迎えください．
- 特になし/特に無し/特にありません **山田のコメント：** me, too.

質問と回答

質問： 9-4 を $K = \det A$, $A = \widehat{I}^{-1}\widehat{II}$ などをつかって E, F, G, L, M, N で表してごり押そうとして挫折したので，解説がほしい．楽なやりかたがありそうなんだけど.... / 9-4 の後半がつまってしまったので解説をお願いしたいです． **お答え：**本日はそこから始めます．

質問： 極小曲面の名前の由来はなんですか． / 極小曲面は何がどう極小なのでしょうか． / 極小曲面という名がついたのはなぜでしょうか．

お答え： 空間の単純閉曲線を境界にもつ曲面のうち，面積が最小なものは平均曲率が恒等的に 0 になる．（時間があったら証明は紹介してもよいが，時間はないかもしれない）

質問： 石鹸水の膜は極小曲面をつくるという話がありましたが，一般に，どんな閉曲線に対してもそれを含んでかつ極小曲面になる曲面は存在しますか?

お答え： そういう曲面の存在を問う問題をプラトー問題 (The Plateau problem) という．解決は Jesse Douglas (1930), Tibor Radó (1930)，独立．Douglas はこの業績で Fields Medal を受賞している (1936).

質問： ガウス曲率，平均曲率は図形的には何を意味しているのでしょうか． **お答え：**今回もう少しコメントします．

質問： ガウス曲率の "K" とは何に由来するのか，あらためて教えていただきたいです．（授業中に先生が仰っていた言葉が聞き取れませんでした...） **お答え：**曲線の曲率 κ の際に一度コメントした：die Krümmung.

質問： 第 n 基本量，第 n 基本形式を帰納的に定義することはできますか? **お答え：**多分できない．

質問： 外積の右ねじの向きや，右手系に歴史的背景等理由はあるのですか? （なぜ左ネジでないのか，何故左手系が一般的でないのか） **お答え：**知りません．

質問： ξ などのドイツ文字やそれ以外の数学で使いそうな文字を学ぶのに適切な方法や資料などあれば教えていただけませんか． **お答え：**ξ はドイツ文字ではなくギリシア文字．佐藤文広「数学ビギナーズマニュアル第 2 版」日本評論社，2014，ISBN-10: 4535787557 ; ISBN-13: 978-4535787551

10 主方向・漸近方向

1 曲面上の曲線 $\gamma(s) = p\bigl(u(s), v(s)\bigr)$ のパラメータ s が弧長であるための条件は

$$E\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2F\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + G\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = 1$$

が成り立つことである．ただし E, F, G は p の第一基本量で，$(u, v) = \bigl(u(s), v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

2 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\gamma(s) = p\bigl(u(s), v(s)\bigr)$ ($\gamma(0) = \mathrm{P} = p(u_0, v_0)$) の P における速度ベクトルは

$$\gamma'(0) = u'(0)p_u(u_0, v_0) + v'(0)p_v(u_0, v_0)$$

である．

3 弧長 s でパラメータづけられた曲面上の曲線 $\gamma(s) = p\bigl(u(s), v(s)\bigr)$ ($\gamma(0) = \mathrm{P}$) の P における法曲率は

$$\kappa_n = L\left(\frac{du}{ds}\right)^2 + 2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds} + N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$$

である．ただし L, M, N は p の第二基本量で，$(u, v) = \bigl(u(s), v(s)\bigr)$ で値をとるものとする．

4 一般に弧長とは限らないパラメータで表された曲線 $\gamma(t) = p\bigl(u(t), v(t)\bigr)$ ($\gamma(0) = \mathrm{P}$) の P における法曲率は

$$\kappa_n = \frac{L(\dot{u})^2 + 2M\dot{u}\dot{v} + N(\dot{v})^2}{E(\dot{u})^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G(\dot{v})^2}$$

である．

5 P を通る曲面上の曲線の P における法曲率は，曲線の P における速度ベクトルの方向のみによって決まる．

$$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = \mathrm{P}\ \text{で速度}\ \boldsymbol{v}\ \text{をもつ曲線の P における法曲率}$$

6 $\kappa_n(-\boldsymbol{v}) = \kappa_n(\boldsymbol{v})$.

7 $\boldsymbol{v}$ が P における曲面の零でない接ベクトル全体を動くとき，κ_n は最大値，最小値をとり，その値は P における曲面の主曲率と一致する．$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ が主曲率と一致するとき $\boldsymbol{v}$（の方向）を主方向という．

8 曲面 p の P における零でない接ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して，点 P を通り，P における曲面の単位法線ベクトル $\nu(\mathrm{P}) = \nu(u_0, v_0)$ と $\boldsymbol{v}$ に平行な平面 $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ をとり，この平面と曲面の交線を，P における速度ベクトルが $\boldsymbol{v}$ であるような $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ 上の曲線 σ とみなす．このとき，$\kappa_n(\boldsymbol{v})$ は σ の P における（平面曲線としての）曲率と一致する．ただし，$\{\boldsymbol{v}, \nu\}$ が $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の正の基底になるように $\Pi_{\boldsymbol{v}}$ の向きを定めておく．

9 点 P における曲面のガウス曲率 $K(\mathrm{P})$ が負ならば，$\kappa_n(\boldsymbol{v}) = 0$ となる方向 $\boldsymbol{v}$ が（$\boldsymbol{v}$ と $-\boldsymbol{v}$ は同一視することにすれば）ちょうど 2 つ存在する（漸近方向）．

10 点 P におけるガウス曲率が負であるとき，曲面の接平面と曲面との共通部分（と P の十分小さい近傍の共通部分）は P で交わる 2 つの曲線となる．これらの曲線の P における接ベクトルは漸近方向をあたえる．

11 P におけるガウス曲率が負であるとき，ふたつの漸近方向は，主方向で 2 等分される．

2016 年 1 月 4 日

問題

10-1 $S=\{(x,y,z)\,|\,x^6+y^6+z^6-1=0\}$ は滑らかな曲面であることを示し，S 上の点 (a,b,c) におけるガウス曲率を (a,b,c) で表せ．（ヒント：$P=(a,b,c)\in S$ が $c\neq 0$ を満たすならば P の近傍で S は $z=f(x,y)$ とグラフ表示される（陰関数定理)．f の形を具体的に求めなくても陰関数の微分公式から f の微分を求めることができるので曲率を計算することができる．$c=0$ のところではどうすればよいか）

10-2 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の各点 $\gamma(t)$ が臍点でなく，その点における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が主方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$）を曲率線という．$\gamma(t)$ が曲率線であるとき，

$$q(t,s):=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)+s\nu\bigl(u(t),v(t)\bigr)$$

であたえられる曲面のガウス曲率を求めなさい．ただし $\nu(u,v)$ は曲面 p の単位法線ベクトル場である．

10-3 曲面のパラメータ表示 $p(u,v)$ において u 曲線，v 曲線が曲率線であるとき，(u,v) を曲率線座標という．曲率線座標のもとでは第一基本行列と第二基本行列が共に対角行列であることを示しなさい．

10-4 曲面 $p(u,v)$ 上の曲線 $\gamma(t)=p\bigl(u(t),v(t)\bigr)$ の各点 $\gamma(t)$ における速度ベクトル $\dot\gamma(t)$ が漸近方向をあたえているとき，$\gamma(t)$ （あるいは，uv 平面上の曲線 $\bigl(u(t),v(t)\bigr)$）を漸近曲線という．とくに u 曲線，v 曲線が漸近曲線であるとき，(u,v) を漸近線座標とよぶ．漸近線座標のもとで，第二基本量は $L=0$, $N=0$, $M\neq 0$ （したがって，漸近線座標が存在すれば自動的にガウス曲率は負）となることを示しなさい．

10-5 一葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ の曲率線座標と漸近線座標を求めなさい．